Марко Кошчица

О ЈЕДНАКОКРАКОМ ТРОУГЛУ

У овом тексту доказаћемо неколико потребних и довољних услова да троугао еуклидске равни или троугао еуклидске равни одређене класе буде једнакокрак. Наведимо најпре без доказа следеће тврђење.

Лема 1. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а W унутрашња тачка странице AB. Тада важи*

$$\frac{AW}{WB} = \frac{\sin\measuredangle ACW}{\sin\measuredangle BCW} \cdot \frac{CA}{BC}. \quad \square$$

Ако је $\triangle ABC$ произвољан троугао еуклидске равни, а U, V и W унутрашње тачке дужи BC, CA и AB, редом, на основу Чевине теореме праве AU, BV и CW сећи ће се у једној тачки ако и само ако важи $\frac{AW}{WB} \cdot \frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VA} = 1$. На основу Чевине теореме и леме 1 може се извести следеће тврђење.

Лема 2. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а U, V и W унутрашње тачке страница BC, CA и AB, редом. Праве AU, BV и CW секу се у једној тачки ако и само ако важи*

$$\frac{\sin\measuredangle ACW}{\sin\measuredangle BCW} \cdot \frac{\sin\measuredangle CBV}{\sin\measuredangle ABV} \cdot \frac{\sin\measuredangle BAU}{\sin\measuredangle CAU} = 1. \quad \square$$

Теорема 1. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$. Ако је тачка O центар описаног круга $\triangle ABC$, тада је $BC = CA$ ако и само ако тачка P припада правој CO.*

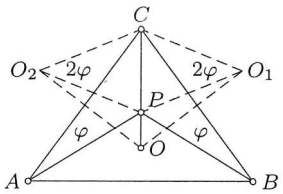
Доказ. ($\Longrightarrow$) Ако је $BC = CA$, онда је $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC$, па важи $\measuredangle PAB = \measuredangle PBA$, одакле је $AP = BP$, па тачка P припада симетрали дужи AB, а у случају $BC = CA$, то је управо права CO.

Смер ($\Longleftarrow$) доказаћемо на четири начина, с тим што ћемо у прва три користити следеће ознаке: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle BCA = \gamma$ и $\measuredangle CAP = \varphi$. Напоменимо да $\measuredangle CAP$ мора бити оштар, јер би у супротном збир углова троугла ABC био строго већи од $180°$.

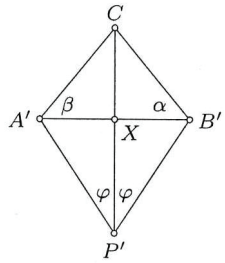
1. начин. Нека су O_1 и O_2 центри кругова k_1 и k_2 описаних око $\triangle CBP$ и $\triangle CAP$, редом (слика 1). Из услова $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$ следи да су полупречници кругова описаних око троуглова CAP и CBP међусобно једнаких дужина. Означимо ту дужину са ρ. По претпоставци тачка P припада правој CO, тј. тачка O припада правој CP, а како је права CP радикална оса кругова k_1 и k_2, то су су потенције $p(O, k_1)$ и $p(O, k_2)$ тачке O у односу на те кругове међусобно једнаке, па следи да је

$$p(O, k_1) = OO_1^2 - \rho^2 = OO_2^2 - \rho^2 = p(O, k_2),$$

одакле је $OO_1 = OO_2$. Троуглови COO_1 и COO_2 подударни су на основу става ССС. Како је $OB = OC$ и $O_1B = O_1C$, то је права OO_1 симетрала дужи BC, па је права BC, права којој припада висина троугла COO_1. Аналогно је права CA, права којој припада висина троугла COO_2, па из подударности троуглова COO_1 и COO_2 следи да је $\measuredangle OCB = \measuredangle OCA$, тј. $\measuredangle PCB = \measuredangle PCA$, па се сада на основу става УСУ доказује да је $\triangle CBP \cong \triangle CAP$, одакле је $BC = CA$.



Слика 1



Слика 2

2. начин. Претпоставимо без умањења општости доказа да је $a \geqslant b$. Тада је $\alpha \geqslant \beta$. Како није $A, O \div BC$ и како није $B, O \div CA$, то су углови CAB и ABC оштри и $\measuredangle OCB = 90^\circ - \alpha$ и $\measuredangle OCA = 90^\circ - \beta$. Притом је $\measuredangle PAB = \alpha - \varphi$ и $\measuredangle PBA = \beta - \varphi$. Како се праве BP, AP и CP секу у једној тачки, то на основу Леме 2 имамо

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\beta-\varphi)}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}\frac{\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(90^\circ-\alpha)} = 1,$$

тј. $\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$, одакле је $\sin(\alpha-\varphi)\cos\beta = \sin(\beta-\varphi)\cos\alpha$. Из последње једнакости имамо да је

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha\cos\beta = \sin\beta\cos\varphi\cos\alpha - \cos\beta\sin\varphi\cos\alpha,$$

одакле је $\sin(\alpha-\beta)\cos\varphi = 0$. Како је $\cos\varphi > 0$ и $\sin(\alpha-\beta) \geqslant 0$, с обзиром да је $0 \leqslant \alpha - \beta < 90^\circ$, следи да мора бити $\sin(\alpha-\beta) = 0$, одакле је $\alpha = \beta$, па је $BC = CA$.

3. начин. Нека је k_3 круг равни $\triangle ABC$ са центром у тачки C и полупречника $\rho_1 > 0$ и нека се при инверзији у односу на круг k_3 тачке A, B и P пресликавају редом у тачке A', B' и P' (слика 2). Тада је $\measuredangle CA'B' = \measuredangle CBA = \beta$, $\measuredangle CB'A' =$

$\measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle A'CP' = \measuredangle ACP = \measuredangle ACO = 90^\circ - \beta$. Из овог следи да је $CP' \perp A'B'$. Означимо са X пресечну тачку правих CP' и дужи $A'B'$. Како је и $\measuredangle A'P'X = \measuredangle A'P'C = \measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \measuredangle B'P'C = \measuredangle B'P'X$. На основу става УСУ следи да је $\triangle A'P'X \cong \triangle B'P'X$, па следи да је $A'X = B'X$, тј. тачка X је средиште дужи $A'B'$. Из последњег следи да је права CP' симетрала дужи $A'B'$, а како тачка C припада правој CP' то на основу својства симетрале дужи следи да $CA' = CB'$, одакле следи да је $BC = \dfrac{\rho_1^2}{CB'} = \dfrac{\rho_1^2}{CA'} = CA$.

4. начин. Следећи доказ извешћемо помоћу комплексних бројева. Наиме, раван у којој се налази $\triangle ABC$ можемо посматрати као комплексну раван у којој је свакој тачки придружен комплексан број и где је растојање између два комплексна броја z_1 и z_2 једнако $|z_1 - z_2|$, при чему је $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Тачкама A, B, C, P и O придружујемо комплексне бројеве a, b, c, p и o, редом. Нека је јединични круг, круг чији је центар тачка којој одговара број 0 и који има полупречник 1. Иначе, за сваку тачку z јединичног круга важи $|z|^2 = |z - 0|^2 = 1$, тј. $z \cdot \bar{z} = 1$, односно $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Нека је круг описан око троугла abc јединични. Тада је $o = 0$. На основу тврђења које се може наћи нпр. у [1], тачке x, y и z комплексне равни су колинеарне ако и само важи $\frac{z-x}{\bar{z}-\bar{x}} = \frac{z-y}{\bar{z}-\bar{y}}$, а како су тачке o, p и c колинеарне, то важи $\frac{-p}{-\bar{p}} = \frac{-c}{-\bar{c}}$, тј.

$$\bar{p} = \frac{p}{c^2}. \tag{1}$$

Према тврђењу из [1], ако $\measuredangle uzv$ означава меру угла чије теме је тачка z, различита од v, а смер ротације тачке u до тачке која припада правој одређеној тачкама z и v, супротан је смеру ротације казаљке на часовнику, онда важи $\theta = \measuredangle uzv$ ако и само ако је

$$\frac{z - v}{|z - v|} = e^{i\theta} \frac{z - u}{|z - u|}.$$

Како је $\varphi = \measuredangle pac = \measuredangle cbp$, имамо $\frac{a-c}{|a-c|} = e^{i\varphi} \frac{a-p}{|a-p|}$ и $\frac{b-p}{|b-p|} = e^{i\varphi} \frac{b-c}{|b-c|}$. Одавде је $\frac{a-c}{|a-c|} \frac{|a-p|}{a-p} = \frac{b-p}{|b-p|} \frac{|b-c|}{b-c}$. Квадрирањем и коришћењем чињенице да за сваки комплексан број z важи $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, добијамо $\frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}} \frac{\bar{a}-\bar{p}}{a-p} = \frac{b-p}{\bar{b}-\bar{p}} \frac{\bar{b}-\bar{c}}{b-c}$, па на основу једнакости (1) и чињенице да за тетиву xy јединичног круга важи $\frac{x-y}{\bar{x}-\bar{y}} = -xy$, добијамо да важи

$$-ac \frac{\frac{1}{a} - \dfrac{p}{c^2}}{a - p} = -\frac{1}{bc} \frac{b - p}{\frac{1}{b} - \dfrac{p}{c^2}}, \quad \text{тј.} \quad \frac{c^2 - ap}{c^2(a - p)} = \frac{b - p}{c^2 - pb}.$$

После множења и сређивања добијамо једнакост

$$(ab - c^2)p^2 = c^2ab - c^4. \tag{2}$$

Без умањења општости доказа можемо узети $c = 1$, па једнакост (2) постаје $(ab - 1)p^2 = ab - 1$. Докажимо да мора бити $ab - 1 = 0$. Ако то не би било испуњено, онда би важило $p^2 = 1$, па би било $p = 1$ или $p = -1$. Не може бити

тачно ни једно ни друго с обзиром да је тачка p унутрашња тачка троугла abc, а самим тим и унутрашња тачка јединичног круга. Следи да мора бити $ab = 1$, одакле је $b = \frac{1}{a} = \bar{a}$, тј. тачке a и b су симетричне у односу на реалну осу тј. праву одређену тачкама o и c, одакле је $|a - c| = |b - c|$. $\square$

Теорема 2. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$. Ако је тачка T тежиште $\triangle ABC$, тада је $BC = CA$ ако и само ако тачка P припада правој CT.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) У случају $BC = CA$, тачка P, тачка C и тежиште троугла ABC припадају симетрали странице AB.

Смер ($\Longleftarrow$) доказаћемо на три начина и користићемо ознаке из прве теореме. Означимо са C_1 средиште странице AB. Услов да тачка T припада правој CP еквивалентан је услову да су тачке C, P и C_1 колинеарне.

1. начин. Исто као и у првом начину прве теореме (слика 1) можемо закључити да је $C_1O_1 = C_1O_2$. Иста једнакост следи и из подударности троуглова C_1SO_1 и C_1SO_2, где је тачка S пресек дијагонала ромба O_1PO_2C. Сада су троуглови AC_1O_2 и BC_1O_1 подударни на основу става ССС, одакле следи да су висине тих троуглова из темена O_1 и O_2 међусобно једнаких дужина. Следи да су тачке O_1 и O_2 на једнаким растојањима од праве AB, па су праве AB и O_1O_2 паралелне, а како је $CC_1 \perp O_1O_2$, то је и $CC_1 \perp AB$, одакле коначно следи да је $BC = CA$.

2. начин. На основу синусне теореме примењене на $\triangle AC_1C$ имамо

$$\sin \measuredangle ACC_1 = \frac{AC_1}{CC_1} \sin \alpha = \frac{AB}{2CC_1} \sin \alpha,$$

док применом синусне теореме на $\triangle BCC_1$ имамо $\sin \measuredangle BCC_1 = \dfrac{AB}{2CC_1} \sin \beta$. Праве CP, BP и AP секу се у једној тачки па је

$$\frac{\sin \measuredangle ACC_1}{\sin \measuredangle BCC_1} \frac{\sin \varphi}{\sin (\beta - \varphi)} \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\sin \varphi} = 1,$$

одакле следи да важи

$$\frac{\sin \alpha \sin (\alpha - \varphi)}{\sin \beta \sin (\beta - \varphi)} = 1. \tag{3}$$

Последња једнакост је еквивалентна, редом, једнакостима:

$$\begin{gathered}
\sin^2 \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi = \sin^2 \beta \cos \varphi - \sin \beta \cos \beta \sin \varphi, \\
(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) \cos \varphi = \tfrac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \sin \varphi, \\
(\tfrac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \tfrac{1 - \cos 2\beta}{2}) \cos \varphi = \tfrac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \sin \varphi, \\
\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta) \cos \varphi = \cos (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta) \sin \varphi, \\
\sin (\alpha - \beta)(\sin (\alpha + \beta) \cos \varphi - \cos (\alpha + \beta) \sin \varphi) = 0, \\
\sin (\alpha - \beta) \sin (\alpha + \beta - \varphi) = 0.
\end{gathered}$$

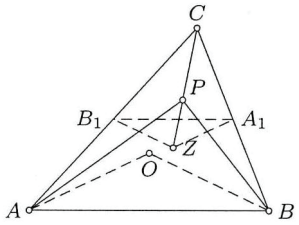
Како је $0^\circ < \alpha + \beta - \varphi < 180^\circ$, то мора бити $\sin(\alpha - \beta) = 0$, а с обзиром да је $-90^\circ < \alpha - \beta < 90^\circ$ следи да важи $\alpha - \beta = 0$, тј. $\alpha = \beta$, одакле је $BC = CA$.

3. начин. Без умањења општости доказа претпоставимо да је $BC \geqslant CA$. Тада је $\alpha \geqslant \beta$, па самим тим и $\alpha - \varphi \geqslant \beta - \varphi$, одакле, на основу односа страница и углова у $\triangle APB$ следи $BP \geqslant AP$. Применом синусне теореме на $\triangle ABC$ имамо $\dfrac{BC}{CA} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, док применом синусне теореме на $\triangle APB$ имамо $\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}$. Сада једнакост (3) можемо написати у облику $\dfrac{BC}{CA}\dfrac{BP}{AP} = 1$, па следи да је $\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{CA}{BC} \leqslant 1$, одакле је $BP \leqslant AP$. Следи да је $BP = AP$, па је $\alpha - \varphi = \beta - \varphi$, односно $\alpha = \beta$, одакле је $BC = CA$. $\square$

Теорема 3. *Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$ и $2\measuredangle BCA + \measuredangle CAP \neq 90^\circ$. Ако је тачка Z центар Ојлеровог круга $\triangle ABC$, тада је $BC = CA$ ако и само ако тачка P припада правој CZ.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) У случају $BC = CA$, тачка P, тачка C, ортоцентар H и центар O описаног круга $\triangle ABC$ припадају симетрали странице AB. У случају да троугао ABC није једнакостранични, тачка Z је средиште дужи OH, док у обрнутом случају, све три тачке O, H и Z се поклапају.

($\Longleftarrow$) Означимо са A_1, B_1 и C_1 средишта дужи BC, CA и AB, редом. Тачка Z је центар круга описаног око $\triangle A_1B_1C_1$, па је $ZA_1 = ZB_1 = \frac{R}{2}$, где је R дужина полупречника круга описаног око $\triangle ABC$. Како је $\triangle A_1ZB_1 \sim \triangle AOB$ то је $\measuredangle ZB_1A_1 = \measuredangle ZA_1B_1 = \measuredangle OAB = 90^\circ - \gamma$, обзиром да је $\triangle ABC$ оштроугли и да се центар O описаног круга $\triangle ABC$ налази у његовој унутрашњости.



Слика 3

Како је права A_1B_1 паралелна правој AB, то је $\measuredangle CB_1A_1 = \measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle B_1A_1C = \measuredangle ABC = \beta$. Применом синусне теореме на $\triangle ZCB_1$ добијамо да важи $\sin\measuredangle ZCB_1 = \dfrac{ZB_1}{CZ}\sin(90^\circ - \gamma + \alpha) = \dfrac{R}{2CZ}\cos(\gamma - \alpha)$ и аналогно $\sin\measuredangle ZCA_1 = \dfrac{R}{2CZ}\cos(\gamma - \beta)$. Праве CP, BP и AP се секу у једној тачки па на основу Леме 2 имамо

$$\frac{\sin\measuredangle ZCB_1}{\sin\measuredangle ZCA_1}\frac{\sin\varphi}{\sin(\beta-\varphi)}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} = 1,$$

одакле следи да важи

$$\cos(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\varphi) = \cos(\beta-\gamma)\sin(\beta-\varphi).$$

Последња једнакост је редом еквивалентна једнакостима:

$$\sin(2\alpha-\varphi-\gamma) + \sin(\gamma-\varphi) = \sin(2\beta-\varphi-\gamma) + \sin(\gamma-\varphi),$$
$$\sin(2\alpha-\varphi-\gamma) - \sin(2\beta-\varphi-\gamma) = 0,$$

$$\cos(\alpha+\beta-\varphi-\gamma)\sin(\alpha-\beta)=0,$$
$$\cos(180^\circ-2\gamma-\varphi)\sin(\alpha-\beta)=0,$$
$$\cos(2\gamma+\varphi)\sin(\alpha-\beta)=0.$$

Како је по услову теореме $2\gamma+\varphi\neq 90^\circ$ и $0^\circ<2\gamma+\varphi<270^\circ$, следи да мора бити $\sin(\alpha-\beta)=0$, па следи да је $\alpha=\beta$, одакле је $BC=CA$. $\square$

Нека је P тачка у унутрашњости $\triangle ABC$ таква да је $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP=\varphi$ и нека права CP сече дуж AB у тачки Q. Тада на основу синусне теореме примењене на $\triangle APC$ важи $\sin\measuredangle APC=\dfrac{CA}{CP}\sin\varphi$ и аналогно $\sin\measuredangle BPC=\dfrac{BC}{CP}\sin\varphi$. Следи да је $\dfrac{\sin\measuredangle APQ}{\sin\measuredangle BPQ}=\dfrac{\sin\measuredangle APC}{\sin\measuredangle BPC}=\dfrac{CA}{BC}$. На основу Леме 1 важи $\dfrac{AQ}{BQ}=\dfrac{\sin\measuredangle APQ}{\sin\measuredangle BPQ}\cdot\dfrac{AP}{BP}$ тј.

$$\frac{AP}{BP}=\frac{BC}{CA}\frac{AQ}{BQ}. \tag{4}$$

Теорема 4. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP$. Тада је $BC=CA$ ако и само ако тачка P припада симетрали угла BCA*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Ако је $BC=CA$, онда се симетрала $\measuredangle BCA$ поклапа са симетралом дужи AB, а у случају $BC=CA$ тачка P припада симетрали дужи AB.

($\Longleftarrow$) Означимо са Q пресечну тачку праве CP и дужи AB. Пошто је права CQ симетрала $\measuredangle BCA$, онда на основу теореме о симетрали угла троугла важи $\dfrac{AQ}{BQ}=\dfrac{CA}{BC}$. На основу једнакости (4) имамо

$$\frac{AP}{BP}=\frac{BC}{CA}\frac{AQ}{BQ}=\frac{BC}{CA}\frac{CA}{BC}=1,$$

па је $AP=BP$, одакле следи да је $\alpha-\varphi=\beta-\varphi$, тј. $\alpha=\beta$, а самим тим и $BC=CA$. $\square$

Напомена. Једнакост $BC=CA$ такође следи из подударности троуглова BCP и ACP.

Теорема 5. *Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP$ и $\measuredangle BCA+\measuredangle CAP\neq 90^\circ$. Ако је H ортоцентар $\triangle ABC$, тада је $BC=CA$ ако и само ако су тачке C,P и H колинеарне.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Ако је $BC=CA$, онда је права CH симетрала дужи AB, а у случају $BC=CA$, тачка P припада симетрали дужи AB.

($\Longleftarrow$) Означимо са Q пресечну тачку праве CP и дужи AB. Тада је $AQ=CA\cos\alpha$ и $BQ=BC\cos\beta$. На основу једнакости (4) имамо

$$\frac{AP}{BP}=\frac{BC}{CA}\frac{AQ}{BQ}=\frac{BC}{CA}\frac{CA\cos\alpha}{BC\cos\beta}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Како је, с друге стране, $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}$, добијамо да важи $\dfrac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, тј. $\sin(\alpha-\varphi)\cos\alpha = \sin(\beta-\varphi)\cos\beta$, што је еквивалентно са $\sin(2\alpha-\varphi) = \sin(2\beta-\varphi)$, тј. $\cos(\alpha+\beta-\varphi)\sin(\alpha-\beta) = 0$. Последња једнакост еквивалента је једнакости $\cos(\gamma+\varphi)\sin(\alpha-\beta) = 0$, из које се, због услова теореме $\gamma+\varphi \neq 90°$, добија једнакост $\sin(\alpha-\beta) = 0$, тј. једнакост $\alpha = \beta$, а самим тим да важи $BC = CA$. □

Теорема 6. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$. Тада је $BC = CA$ ако и само ако тачка P припада симедијани $\triangle ABC$ из темена C.*

Доказ ($\Longrightarrow$) Ако је $BC = CA$, онда се симедијана из темена C поклапа са симетралом дужи AB, а у том случају тачка P припада симетрали дужи AB.

($\Longleftarrow$) Означимо са Q пресечну тачку праве CP и дужи AB. Пошто је права CQ симедијана $\triangle ABC$ из темена C, онда важи $\dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{CA^2}{BC^2}$. На основу једнакости (4) имамо

$$\frac{AP}{BP} = \frac{BC}{CA}\frac{AQ}{BQ} = \frac{BC}{CA}\frac{CA^2}{BC^2} = \frac{CA}{BC}.$$

Како је $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$, то је $\triangle APC \sim \triangle BPC$, па је $\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{CP}{CP} = 1$, тј. $BC = CA$. □

Теорема 7. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$. Ако је D тачка у којој спољa приписани круг $\triangle ABC$ који одговара темену C, додирује страницу AB, тада је $BC = CA$ ако и само ако су тачке C, P и D колинеарне.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Ако је $BC = CA$, онда је права CD симетрала дужи AB, а у случају $BC = CA$, тачка P припада симетрали дуж AB.

($\Longleftarrow$) Без умањена општости доказа претпоставимо да је $a > b$. Тада је $\alpha > \beta$ и $\alpha-\varphi > \beta-\varphi$, па самим тим и $BP > AP$. Може се показати да важи $AD = s-b$ и $BD = s-a$, где је са s означен полуобим $\triangle ABC$. Тада је $D \equiv Q$, па једнакост (4) постаје

$$\frac{AP}{BP} = \frac{BC}{CA}\frac{AD}{BD} = \frac{a(s-b)}{b(s-a)}.$$

Како је

$$a(s-b) - b(s-c) = \frac{1}{2}(a(c+a-b) - b(b+c-a)) = \frac{1}{2}(a-b)(a+b+c) > 0,$$

то из последњег следи $\dfrac{AP}{BP} > 1$, тј. $AP > BP$, што је немогуће. Аналогно се доказује да не може бити ни $a < b$. Следи да важи $BC = CA$. □

Последица 7.1. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, P тачка у његовој унутрашњости таква да важи $\measuredangle CAP = \measuredangle CBP$, а K тачка уписаног круга $\triangle ABC$ која је дијаметрално супротна тачки додира тог круга и странице AB. Тада је $BC = CA$ ако и само ако тачка P припада правој CK.*

Доказ. Нека права која садржи тачку K и паралелна је правој AB сече дужи BC и CA редом у тачкама M и N и нека је S центар уписаног круга $\triangle ABC$. Тада је $\measuredangle NSK = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle MSK = \frac{\beta}{2}$, па је $NK = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $MK = r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, одакле је $\dfrac{NK}{MK} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \dfrac{\frac{r}{s-a}}{\frac{r}{s-b}} = \dfrac{s-b}{s-a}$. Тачке C, K и тачка у којој споља приписани круг $\triangle ABC$ који одговара темену C и додирује страницу AB, колинеарне су, па тврђење следи из Теореме 7. $\square$

Нека се тачка Q, у којој права CP сече дуж AB, поклапа са тачком у којој уписани круг $\triangle ABC$ додирује страницу AB. Претпоставимо да важи $\alpha \leqslant 60^\circ$ и $\beta \leqslant 60^\circ$. Означимо са r дужину полупречника уписаног круга $\triangle ABC$. Тада је $AQ = \dfrac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, BQ = \dfrac{r}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$, па користећи једнакост (4) добијамо да важи

$$\frac{AP}{BP} = \frac{BC}{CA}\frac{AQ}{BQ} = \frac{a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\sin\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

С друге стране је $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}$, па добијамо да важи

$$\sin(\alpha-\varphi)\cos^2\tfrac{\alpha}{2} = \sin(\beta-\varphi)\cos^2\tfrac{\beta}{2}. \tag{5}$$

Како је $\sin(\alpha-\varphi)\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\cos\varphi - (2\cos^4\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2})\sin\varphi$, то се једнакост (5) своди на једнакост

$$2(\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos^3\tfrac{\alpha}{2} - \sin\tfrac{\beta}{2}\cos^3\tfrac{\beta}{2})\cos\varphi = ((2\cos^4\tfrac{\alpha}{2} - \cos^2\tfrac{\alpha}{2}) - ((2\cos^4\tfrac{\beta}{2} - \cos^2\tfrac{\beta}{2}))\sin\varphi.$$

Последњу једнакост можемо написати у облику

$$(f(\alpha) - f(\beta))\cos\varphi = (g(\alpha) - g(\beta))\sin\varphi, \tag{6}$$

где су f и g функције које пресликавају интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ у скуп $\mathbb{R}$ реалних бројева, дефинисане са $f(t) = 2\sin\frac{t}{2}\cos^3\frac{t}{2}$ и $g(t) = 2\cos^4\frac{t}{2} - \cos^2\frac{t}{2}$, где $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Лако се изводи да је $f'(t) = \cos^2\frac{t}{2}(1 - 4\sin^2\frac{t}{2})$ и $g'(t) = \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}(4\sin^2\frac{t}{2} - 3)$. Очигледно је да је $f'(t) > 0$ и $g'(t) < 0$, за свако $t \in (0, \frac{\pi}{3})$. Следи да је функција f строго растућа, а функција g строго опадајућа на интервалу $(0, \frac{\pi}{3})$. Ако су углови α и β строго мањи од $\frac{\pi}{3}$, онда они морају бити једнаки, јер би у супротном стране једнакости (6) биле различите од нуле и супротних знакова, што је немогуће. Ако је један од углова α или β једнак $\frac{\pi}{3}$, на пример $\alpha = \frac{\pi}{3}$, докажимо да тада мора бити и $\beta = \frac{\pi}{3}$. Претпоставимо супротно, тј. да $\beta \in (0, \frac{\pi}{3})$. Нека је ε произвољан позитиван број. Како је функција f непрекидна на интервалу $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то је $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{3}-} f(t) = f(\frac{\pi}{3})$, па постоји реалан број $\delta_\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{3} - \beta)$, тако да

за сваки реалан број t који припада интервалу $(\frac{\pi}{3}-\delta_\varepsilon, \frac{\pi}{3})$, важи $|f(\frac{\pi}{3})-f(t)|<\varepsilon$, па самим тим и $f(\frac{\pi}{3})-f(t)>-\varepsilon$. Тада је

$$f(\tfrac{\pi}{3})-f(\beta)=(f(\tfrac{\pi}{3})-f(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\delta_\varepsilon}{2}))+(f(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\delta_\varepsilon}{2})-f(\beta))>f(\tfrac{\pi}{3})-f(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\delta_\varepsilon}{2})>-\varepsilon,$$

обзиром да је $f(\frac{\pi}{3}-\frac{\delta_\varepsilon}{2})-f(\beta)>0$, јер је функција f строго растућа на интервалу $(0,\frac{\pi}{3})$. Следи да мора бити $f(\frac{\pi}{3})-f(\beta)\geqslant 0$. Аналогно се може доказати да за сваки реалан број $\varepsilon>0$, важи $g(\frac{\pi}{3})-g(\beta)<\varepsilon$, па следи да мора бити $g(\frac{\pi}{3})-g(\beta)\leqslant 0$. Лева страна једнакости (6) у случају $\alpha=\frac{\pi}{3}$, већа је или једнака нули, док је њена десна страна мања или једнака нули. Ово је могуће једино за $f(\frac{\pi}{3})-f(\beta)=g(\frac{\pi}{3})-g(\beta)=0$, тј. за $f(\beta)=f(\frac{\pi}{3})$ и $g(\beta)=g(\frac{\pi}{3})$, па следи да је $\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}=\dfrac{f(\frac{\pi}{3})}{g(\frac{\pi}{3})}$. Како је $\dfrac{f(t)}{g(t)}=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos^3\frac{t}{2}}{2\cos^4\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}}=\operatorname{tg}t$, добијамо да је $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, што је немогуће, с обзиром да $\beta\in(0,\frac{\pi}{3})$, а функција tg строго растућа на интервалу $(0,\frac{\pi}{2})$. Следи да мора бити $\beta\geqslant\frac{\pi}{3}$, а како је по услову теореме $\beta\leqslant\frac{\pi}{3}$, то је $\beta=\frac{\pi}{3}=\alpha$. У оба случаја, из једнакости $\alpha=\beta$, следи једнакост $BC=CA$.

Овим смо доказали следеће тврђење:

Теорема 8. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни код којег је $\measuredangle CAB\leqslant 60^\circ$ и $\measuredangle ABC\leqslant 60^\circ$ и нека је P тачка унутрашњости $\triangle ABC$, таква да важи $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP$. Ако је E тачка у којој уписани круг $\triangle ABC$ додирује страницу AB, тада је $BC=CA$ ако и само ако су тачке C,P и E колинеарне.* $\square$

Последица 8.1. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни код којег је $\measuredangle CAB\leqslant 60^\circ$ и $\measuredangle ABC\leqslant 60^\circ$, P тачка у његовој унутрашњости таква да важи $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP$, а K тачка уписаног круга $\triangle ABC$ која је дијаметрално супротна тачки додира тог круга и странице AB. Нека права која садржи тачку K и паралелна је правој AB сече дужи BC и CA редом у тачкама M и N. Ако је L тачка дужи MN таква да је $NL=KM$, тада је $BC=CA$ ако и само ако тачка P припада правој CL.*

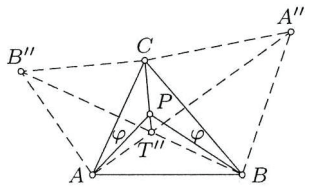
Доказ. Како је $NL=KM=r\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $LM=MN-NL=MN-KM=KN=r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\dfrac{NL}{LM}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, то су тачке C,L и тачка у којој уписани круг $\triangle ABC$ додирује страницу AB, колинеарне, па на основу Теореме 8 следи тврђење. $\square$

Теорема 9. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни код којег је $\measuredangle BCA\neq 120^\circ$ и нека је P тачка у његовој унутрашњости, таква да је $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP$ и $\measuredangle BCA+\measuredangle CAP\neq 60^\circ$. Ако је T'' Торичелијева тачка $\triangle ABC$, тада је $BC=CA$ ако и само ако тачка T'' припада правој CP.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Нека су A'' и B'' тачке такве да важи $A,A''\div BC$ и $B,B''\div CA$ и притом су троуглови $BA''C$ и $AB''C$ једнакостранични. Тада је тачка T'' пресечна тачка дужи AA'' и BB''. У случају $BC=CA$, тачке C и P припадају симетрали дужи AB. На основу става СУС важи $\triangle ACA''\cong\triangle BCB''$, па је

$\measuredangle CAA'' = \measuredangle CBB''$, а како је и $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC$, то је $\measuredangle T''AB = \measuredangle T''BA$, па важи $AT'' = BT''$, одакле следи да тачка T'' припада симетрали дужи AB.

($\Longleftarrow$) Размотримо прво случај $\measuredangle BCA < 120°$. Како је на основу става СУС, $\triangle AA''C \cong \triangle BB''C$, то је $\measuredangle CAT'' = \measuredangle CB''T''$, $\measuredangle CBT'' = \measuredangle CA''T''$ и $AA'' = BB''$. Тада су четвороуглови $CT''BA''$ и $CT''AB''$ тетивни, па је $\measuredangle CT''A'' = \measuredangle CBA'' = 60°$ и $\measuredangle CT''B'' = \measuredangle CAB'' = 60°$. Ако важи $P \equiv T''$, тада је $\measuredangle CB''B = \measuredangle CB''T'' = \measuredangle CAT'' = \measuredangle CAP = \measuredangle CBP = \measuredangle CBT'' = \measuredangle CBB''$, па је $BC = CB''$, тј. $BC = CA$.



Слика 4

Ако је $P \neq T''$, претпоставимо да важи распоред $C - P - T''$ (случај $C - T'' - P$, разматра се слично). Нека је $AA'' = t_0$, $\measuredangle APT'' = \varepsilon_1$, $\measuredangle BPT'' = \varepsilon_2$, $\measuredangle T''AB = \theta$ и $\measuredangle T''BA = \eta$. На основу синусне теореме примењене на $\triangle APC$ добијамо $\sin\varepsilon_1 = \sin(180° - \varepsilon_1) = \sin\measuredangle APC = \dfrac{b}{CP}\sin\varphi$. Слично се добија да је $\sin\varepsilon_2 = \dfrac{a}{CP}\sin\varphi$. На основу синусне теореме примењене на $\triangle AT''P$ важи $\dfrac{AP}{AT''} = \dfrac{\sin 120°}{\sin\varepsilon_1}$ и слично $\dfrac{BP}{BT''} = \dfrac{\sin 120°}{\sin\varepsilon_2}$. Дељењем последњих двеју једнакости добијамо да важи

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AT''}{BT''}\cdot\frac{\sin\varepsilon_2}{\sin\varepsilon_1} = \frac{AT''}{BT''}\cdot\frac{\dfrac{a}{CP}\sin\varphi}{\dfrac{b}{CP}\sin\varphi} = \frac{AT''}{BT''}\cdot\frac{a}{b}. \tag{7}$$

Из синусне теореме примењене на $\triangle ABA''$, добијамо важи $\sin\theta = \dfrac{BA''}{AA''}\sin\measuredangle ABA'' = \dfrac{a}{t_0}\sin(\beta + 60°)$ и слично $\sin\eta = \dfrac{b}{t_0}\sin(\alpha + 60°)$. На основу синусне теореме примењене на $\triangle AT''B$ добијамо да важи

$$\frac{AT''}{BT''} = \frac{\sin\eta}{\sin\theta} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha + 60°)}{\sin(\beta + 60°)}.$$

Из последњег низа једнакости и једнакости (7) добијамо да важи

$$\frac{AP}{BP} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha + 60°)}{\sin(\beta + 60°)}\cdot\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha + 60°)}{\sin(\beta + 60°)}.$$

Како је, с друге стране, $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)}$, то добијамо да важи

$$\frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(\alpha + 60°)}{\sin(\beta + 60°)}.$$

Напоменимо да се и у случају $\measuredangle BCA \in (120°, 180°)$ може добити ова једнакост. Из последње једнакости добијамо да важе, редом, следеће једнакости:

$$\begin{gathered}
\sin(\alpha-\varphi)\cdot\sin(\alpha+60^\circ)=\sin(\beta-\varphi)\cdot\sin(\beta+60^\circ),\\
\cos(2\alpha+60^\circ-\varphi)=\cos(2\beta+60^\circ-\varphi),\\
\cos(2\alpha+60^\circ-\varphi)-\cos(2\beta+60^\circ-\varphi)=0,\\
-2\sin\frac{2(\alpha+\beta)+120^\circ-2\varphi}{2}\sin(\alpha-\beta)=0,\\
\sin(\alpha+\beta+60^\circ-\varphi)\sin(\alpha-\beta)=0,\\
\sin(180^\circ-\gamma+60^\circ-\varphi)\sin(\alpha-\beta)=0,\\
\sin(180^\circ-(\gamma+\varphi-60^\circ))\sin(\alpha-\beta)=0,\\
\sin(\gamma+\varphi-60^\circ)\sin(\alpha-\beta)=0.
\end{gathered}$$

Како $\gamma+\varphi-60^\circ\in(-60^\circ,120^\circ)$ и по претпоставци теореме је $\gamma+\varphi-60^\circ\neq 0^\circ$, то из последње једнакости закључујемо да мора бити $\sin(\alpha-\beta)=0$, одакле је $\alpha=\beta$, па следи да важи $BC=CA$, за $\measuredangle BCA\neq 120^\circ$. У случају $\measuredangle BCA=120^\circ$ важи $T''\equiv C$, па овај случај не разматрамо. $\square$

Теорема 10. *Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости таква да важи $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP$. Ако је S_c центар споља приписаног круга $\triangle ABC$ који одговара темену C, а D тачка, у којој тај круг додирује страницу AB, тада је $BC=CA$ ако и само ако тачка P припада правој DS_c.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) У случају $BC=CA$, тачке P,D и S_c припадају симетрали дужи AB.

($\Longleftarrow$) Без умањења општости доказа можемо претпоставити да је $a\geqslant b$. Тада је $\alpha-\varphi\geqslant\beta-\varphi$, па из троугла APB закључујемо да је $AP\leqslant BP$, одакле је

$$AD^2-BD^2=AP^2-BP^2\leqslant 0.$$

С друге стране је $AD=s-b$ и $BD=s-a$, па је

$$AD^2-BD^2=(s-b)^2-(s-a)^2=(s-b-(s-a))(s-a+s-b)=(a-b)c\geqslant 0.$$

Закључујемо да мора бити $AD^2-BD^2=0$, одакле је $AD=BD$, па следи да важи $BC=CA$. $\square$

Теорема 11. *Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни, а P тачка у његовој унутрашњости таква да важи $\measuredangle CAP=\measuredangle CBP$ и $\measuredangle BCA+\measuredangle CAP\geqslant 90^\circ$. Ако је F тачка у којој бисектриса $\measuredangle BCA$ сече страницу AB, а n права у равни троугла ABC која садржи тачку F и нормална је на праву AB, тада је $BC=CA$ ако и само ако $P\in n$.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) У случају $BC=CA$, тачка P припада симетрали дужи AB, која се у случају $BC=CA$, поклапа са правом n.

($\Longleftarrow$) Уведимо ознаку $\measuredangle APB=\psi$. Тада је $\psi=\gamma+2\varphi$. На основу синусне теореме примењене на $\triangle APB$, важи $AP=\dfrac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin\psi}c$ и $BP=\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\psi}c$, па

је

$$\begin{aligned}
AP^2 - BP^2 &= \frac{c^2}{\sin^2\psi}\cdot(\sin^2(\beta-\varphi)-\sin^2(\alpha-\varphi))\\
&= \frac{c^2}{\sin^2\psi}\cdot(\sin(\beta-\varphi)-\sin(\alpha-\varphi))\cdot(\sin(\beta-\varphi)+\sin(\alpha-\varphi))\\
&= \frac{c^2}{\sin^2\psi}\cdot 2\cdot\cos\frac{\beta-\varphi+\alpha-\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\varphi-\alpha+\varphi}{2}\times\\
&\quad\times 2\cdot\sin\frac{\beta-\varphi+\alpha-\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\varphi-\alpha+\varphi}{2}\\
&= \frac{c^2}{\sin^2\psi}\cdot\sin(\alpha+\beta-2\varphi)\cdot\sin(\beta-\alpha) = \frac{c^2}{\sin\psi}\cdot\sin(\beta-\alpha),
\end{aligned}$$

с обзиром да је $\sin(\alpha+\beta-2\varphi) = \sin(180^\circ-\gamma-2\varphi) = \sin\psi$. На основу теореме о симетрали угла троугла је $AF = \dfrac{b}{a+b}c$ и $BF = \dfrac{a}{a+b}c$, па је

$$\begin{aligned}
AF^2 - BF^2 &= \frac{c^2}{(a+b)^2}\cdot(b^2-a^2) = \frac{c^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{c^2}{\sin^2\gamma}\cdot(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\\
&= \frac{c^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{c^2}{\sin^2\gamma}\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)\\
&= \frac{c^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{c^2}{\sin\gamma}\cdot\sin(\beta-\alpha).
\end{aligned}$$

Како $P\in n$, то важи $AF^2-BF^2 = AP^2-BP^2$, одакле следи да важи $\sin(\beta-\alpha)\cdot(\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{1}{\sin\gamma}-\dfrac{1}{\sin\psi}) = 0$. Како је

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{1}{\sin\gamma}-\frac{1}{\sin\psi} &< \frac{1}{\sin\gamma}-\frac{1}{\sin\psi} = \frac{\sin\psi-\sin\gamma}{\sin\psi\cdot\sin\gamma}\\
&= 2\cdot\frac{\sin\frac{\psi-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\psi+\gamma}{2}}{\sin\psi\cdot\sin\gamma} = 2\cdot\frac{\sin\frac{2\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+2\varphi+\gamma}{2}}{\sin\psi\cdot\sin\gamma}\\
&= 2\cdot\frac{\sin\varphi\cdot\cos(\gamma+\varphi)}{\sin\psi\cdot\sin\gamma}\leqslant 0,
\end{aligned}$$

с обзиром да је $c<a+b$ и $\gamma+\varphi\geqslant 90^\circ$, то је $\sin(\beta-\alpha)=0$, па следи да важи $\alpha=\beta$, а самим тим и $BC=CA$. $\square$

Задаци

1. Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни и нека су M и N тачке у његовој унутрашњости такве да важи $\measuredangle CAM = \measuredangle CBN$ и $CM = CN$. Ако се праве AM и BN секу у тачки P и ако је S средиште дужи MN, тада је $BC = CA$ ако и само ако су тачке C, P и S колинеарне.

2. Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни и нека су M и N тачке у његовој унутрашњости такве да важи $\measuredangle CAM = \measuredangle CBN$ и $AM = BN$. Ако се праве AM и BN секу у тачки P и ако је S средиште дужи MN, тада је $BC = CA$ ако и само ако су тачке C, P и S колинеарне.
3. Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни и нека су M и N тачке у његовој унутрашњости такве да важи $\measuredangle CAM = \measuredangle CBN$ и $CM = CN$ и $\measuredangle BCA + \measuredangle CAM - \frac{1}{2}\measuredangle MCN \neq 90^\circ$. Ако је S средиште дужи MN, тада је $BC = CA$ ако и само ако је $CS \perp AB$.
4. Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни и нека су M и N тачке у његовој унутрашњости такве да важи $\measuredangle CAM = \measuredangle CBN$ и $AM = BN$. Ако је S средиште дужи MN, тада је $BC = CA$ ако и само ако је $CS \perp AB$.
5. Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни и нека су M и N унутрашње тачке странице AB такве да важи $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN$, а мера угла MCN није строго већа од мере угла CAB и мере угла ABC. Ако бисектриса угла CAB сече дуж CM у тачки P, а бисектриса угла ABC дуж CN у тачки Q, тада је $BC = CA$ ако и само ако је $AP = BQ$.
6. Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни и нека су M и N унутрашње тачке странице AB, такве да важи распоред $A - M - N - B$ и једнакост $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN$. Ако бисектриса угла BNC троугла BNC сече страницу BC у тачки P, а бисектриса угла AMC троугла AMC страницу CA у тачки Q, тада је $BC = CA$ ако и само ако је $PQ \parallel AB$.
7. Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни и нека су M и N унутрашње тачке дужи AB, такве да важи распоред $A - M - N - B$ и једнакост $\measuredangle ACM = \measuredangle BCN$, при чему важи $\max\{\measuredangle CAB, \measuredangle ABC\} + \measuredangle ACM \leqslant 90^\circ$. Ако је P унутрашња тачка странице BC, а Q унутрашња тачка странице CA такве да важи $\measuredangle AMQ = \measuredangle BNP$ и $\max\{\measuredangle CAB, \measuredangle ABC\} + \measuredangle AMQ \leqslant 90^\circ$, тада је $BC = CA$ ако и само ако је $MQ = PN$.
8. Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао еуклидске равни и нека су M и N унутрашње тачке странице AB, такве да важи распоред $A - M - N - B$ и једнакост $AM = BN$. Ако је P подножје нормале из тачке M на страницу BC, Q подножје нормале из тачке N на страницу CA, а L пресечна тачка дужи MP и NQ, тада је $BC = CA$ ако и само ако је $CL \perp PQ$.
9. Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, а Q тачка у његовој унутрашњости таква да важи $QA = QB$. Ако је S центар уписаног круга $\triangle ABC$, тада је $BC = CA$ ако и само ако тачка Q припада правој CS.
10. Нека је $\triangle ABC$ троугао еуклидске равни, P тачка за коју је $P, A \div BC$ и $PB = PC$, Q тачка за коју је $Q, B \div CA$ и $QA = QC$ и притом важи $\measuredangle PBC = \measuredangle QAC$ и $\max\{\measuredangle CAB, \measuredangle ABC\} + \measuredangle PBC < 180^\circ$. Тада важи $BC = CA$ ако и само ако нормала на PQ из тачке C садржи средиште дужи AB.

Литература

[1] М. Радовановић, *Комплексни бројеви у геометрији*, `srb.imomath.com`

[2] М. Крстић, *Примена комплексних бројева у планиметрији*, Математика и информатика, **2**, св. 1, Ниш, 2013.

[3] Д. С. Јовић, *О симедијани троугла*, Настава математике **50**, 3 (2005), 21–24.

ОШ „Др Драган Херцог“, Београд

E-mail: markocos10@hotmail.com, markokoscicarm@gmail.com