Мирослав Б. Младеновић – Мирац

АНАЛОГИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

1. Увод

Реч *аналогија* је грчког порекла са смислом: сличност, сродност, сродство, слагање, наликовање. Аналогија у математици се односи на сличност различитих математичких објеката, доказа теорема итд. Тако аналогијом повезујемо троугао и тетраедар, правоугоаник и квадар, квадрат и коцку, паралелограм и пралелопипед, круг и лопту, кружницу и сферу итд. Наравно, закључке базиране на аналогији треба доказати.

Закључивање по аналогији је мисаони поступак при којем се из опажања да се два објекта подударају у одређеном броју својстава или односа изводи закључак да се они подударају и у другим својствима или односима који се код једног од објеката нису запажали. Закључивање по ананлогији је кретање мисаоног тока на истом степену општости, тј. од посебног ка посебном или од општег ка општем (по чему се разликује и од *индуктивног* и од *дедуктивног* закључивања).

Постоје два типа аналогије: *атрибуције* и *пропорције.* У атрибуцији се придаје пуно значење речи (нпр. коришћење речи *здрав*, која се иначе односи на живе организме, на аналоган начин за климу, храну и сл). Пропорционалност се темељи на сличности односа код различитих субјеката (нпр. каже се да се насмешило Сунце, јер се ради о сличности са човеком који се смеје).

Закључивање по аналогији има важно место у математичком мишљењу, јер се путем таквог закључивања често долази до неких истина које би иначе биле можда теже уочене.

Ипак, често закључивање по аналогији доводи до погрешних резултата, тако да закључак по аналогији треба увек прихватити само као *претпоставку* (*хипотезу*) коју треба још испитати. То је и тазумљиво јер, ако су објекти слични у неким, не морају бити слични у свим особинама. Због тога сваки овакав закључак треба проверити и, ако је могуће, доказати.

Аналогија може бити врло корисна у настави математике. Током часа наставник често говори: „слично се изводи“, „аналогно се добија“, „на исти начин се доказује“, „ово је сродан задатак“ и сл. Таквим излагањем наставник свесно указује на аналогију. Тако она постаје помоћно средство повезивања и лакшег савладавања наставног градива, те средство развијања креативности ученика.

У даљем ћемо навести више примера, како исправног, тако и неисправног закључивања по аналогији, посебно у области наставе математике, и то углавном у основној, али и у средњој школи. Циљ нам је да укажемо на важност ове методе, али и неопходност пажње при његовој примени. У дидактичко-методолошком смислу примена аналогије може дати плодне резултате, али морамо водити рачуна да коришћење аналогије увек мора бити уз пуни опрез.

2. Примери закључивања по аналогији

2.1. Слично и тачно

Пример 1. Ученицима је, још из млађих разреда основне школе, познато правило да количник два природна броја не мења вредност ако се дељеник и делилац помноже истим бројем. На пример, важи

$$24 : 6 = 4, \quad \text{као и} \quad (24 \cdot 3) : (6 \cdot 3) = 72 : 18 = 4.$$

Аналогно важи за рационалне бројеве у децимланом запису, на пример,

$$90{,}1 : 1{,}7 = (90{,}1 \cdot 10) : (1{,}7 \cdot 10) = 901 : 17 = 53.$$

Видимо да смо дошли до правила за дељење бројева у децималном запису.

Пример 2. Познато је да се у ма који троугао може уписати јединствено одређена кружница и њено средиште је у пресеку симетрала углова троугла. Природно је претпоставити да се, аналогно, у сваки тетраедар може уписати јединствена сфера и да је њено средиште у пресеку симетријских равни углова диедара тог тетраедра. И овај закључак је исправан и може се строго доказати. Слично се може извести и аналогија описане сфере тетраедра са описаном кружницом троугла.

У вези с претходним може се поставити питање: зашто су троугао и тетраедар аналогни објекти? Одговор би могао бити следећи: троугао је најједноставнији полигон, одређен је најмањим бројем (три) неколинеарних тачака и ограничен са 3 дужи; тетраедар је најједноставнији полиедар, одређен је најмањим бројем (четири) некомпланарних тачака у простору и ограничен је са 4 троугла.

На сличан начин се могу успоставити аналогије и у следећим примерима.

Пример 3. 1° Правоугаоник и квадар: правоугаоник има наспрамне странице које су паралелне и једнаке, а суседне странице су нормалне; квадар има наспрамне стране које леже у паралелним равнима и подударне су, док суседне стране леже у нормалним равнима.

2° Квадрат и коцка.

3° Паралелограм и паралелопипед.

4° Кружница и сфера.

5° Круг и лопта.

Пример 4. Познато је да је површина квадрата, конструисаног над хипотенузом правоуглог трогла, једнака збиру површина квадрата конструисаних над катетама тог троугла. Може се по аналогији претпоставити да је површина било каквог многоугла, конструисаног над хипотенузом правоуглог троугла, једнака збиру површина *њему сличних* многоуглова, конструисаних над катетама тог троугла. И у овом случају се може доказати да је ова претпоставка тачна.

Пример 5. Постоји очита сличност формуле за површину правоугаоника с дужинама страница a и b ($P = a \cdot b$) и формуле за запремину квадра с ивицама дужине a, b и c ($V = a \cdot b \cdot c$).

Пример 6. Зна се да из $a = b$ следи $a + c = b + c$, $a - c = b - c$ и $ac = bc$. Аналогно се може претпоставити да из $a > b$ следи $a + c > b + c$, $a - c > b - c$ и $ac > bc$. Међутим, овде су само прва два закључка тачна, док закључак $ac > bc$ важи само ако је $c > 0$ (док за $c < 0$ важи $ac < bc$).

2.2. Слично али нетачно

Пример 7. Не треба очекивати да свако својство троугла има просторни аналогон. На пример, праве одређене висинама троугла секу се у једној тачки, али то не важи за праве одређене висинама произвољног тетраедра.

Пример 8. У сваки троугао може се уписати јединствена кружница. Могло би се помислити да се и у сваки четвороугао може уписати кружница. Провером се убеђујемо да такав закључак није исправан, јер постоје четвороуглови у које се не може уписати кружница. Ипак, оваква (неисправна) аналогија нас бар наводи да поставимо питање: у које четвороуглове се може уписати кружница? Тако долазимо до појма тангентног четвороугла и услова које такви четвороуглови задовољавају.

Пример 9.

Важи	Не важи
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b, d \neq 0)$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$
$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$	$\frac{a}{b + c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 = a^2 + b^2$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

Пример 10. Ако се једна страница правоугаоника увећа два пута, а друга смањи два пута, лако се утврђује да се површина правоугаоника не мења.

Међутим, следеће закључивање по аналогији са претходним није правилно: „Ако се једна страница правоугаоника повећа за 20%, а друга смањи за 20%, тада се површина правоугаоника не мења.

3. Аналогни поступци

Осим уочавања сродних објеката и постављања хипотеза преношењем својстава једног објекта на други, важно је да добијено својство треба доказати. Није редак случај да се и међу поступцима доказивања може уочити сличност. Поменимо један такав пример у настави математике у основној школи.

Пример 11. Доказ тврђења да је свака тачка симетрале дужи једнако удаљена од крајева дужи аналоган је доказу тврђења да је свака тачка симетрале угла једнако удаљена од његових кракова.

Примена метода аналогије у решавању задатака

Задатак 1. Израчунати површину троугла ако је познат полупречник r уписане кружнице и обим троугла O.

Решење. Нека је у троугао ABC (с дужинама страница a, b, c и обимом O) уписана кружница са средиштем S и полупречником r. Спојимо темена A, B и C с тачком S и уочимо троуглове ABS, BCS и CAS. Површина троугла ABC једнака је збиру површина тих троуглова, дакле

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS} \\ &= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{1}{2} r \cdot O. \end{aligned}$$

Задатак 1$'$ На потпуно аналоган начин доказује се да је површина произвољног конвексног полигона у који се може уписати кружница једнака $\frac{1}{2} r \cdot O$, где је O обим полигона, а r полупречник уписане кружнице.

Тродимензиона варијанта претходног задатка гласи:

Задатак 1$''$ Израчунати запремину пирамиде у коју се може уписати сфера ако је познат полупречник r те сфере и површина пирамиде P.

Решење. Поступамо аналогно претходном решењу. Нека је у n-тострану пирамиду уписана сфера са средиштем S и полупречником r. Као што смо у претходном задатку средиште кружнице схватили као врх помоћних троуглова чија унија је дати троугао, тако овде претпоставимо да је тачка S врх помоћних пирамида чија унија је дата пирамида. Површине база тих помоћних пирамида су површина базе дате пирамиде B и површине њених бочних страна P_1, P_2, ... , P_n. Свака од тих помоћних пирамида има висину једнаку r, па је запремина целе пирамиде

$$\begin{aligned} V &= V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \frac{B \cdot r}{3} + \frac{P_1 \cdot r}{3} + \frac{P_2 \cdot r}{3} + \cdots + \frac{P_n \cdot r}{3} \\ &= \frac{r}{3}(B + P_1 + P_2 + \cdots + P_n) = \frac{1}{3} r \cdot P. \end{aligned}$$

Закључимо да има много примера коришћења аналогије у школској математици. Сви они показују колика је она важна у наставном процесу јер се помоћу ње градиво повезује, одређено раније усвојено обнавља и утврђује, а и ново градиво лакше усваја.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Akalović i dr, *O nekim analogijama u matematici*, Matematičko-fizički list, LIX, 1 (2008/09), 10–17.

[2] Б. Боричић, *О методу аналогије*, Настава математике XLIII, 4 (1998), 1–6.

[3] Д. Гласновић, *Како боље разумјети математичке појмове*, Математика и школа VI, 26 (2004), 26–31.

[4] M. Hlapa, *Lijepa analogija*, Matematičko-fizički list, LVIII, 2 (2007/08), 91–92.

[5] З. Кумим, *Аналогија*, Математика и школа 2 (2000), 101–109.

[6] С. Петровић, Ј. Мартић, М. Петковић, *Дидакричко-методички приручник (за наставу математике од V до VIII разреда)*, Завод за уџбенике и наставна средства Србије, Београд, 1983.

[7] И. А. Соловцова, *Аналогија као средство теоријског усвајања педагошких дисциплина*, Зборник Института за педагошка истраживања 38, 2 (2006), 356–370.

[8] В. Андрић, *Аналогија у математици*, Математички лист за ученике основне школе, Друштво математичара Србије 1 (1981), 1–3.

[9] Филозофски ријечник, препринт, 2009.

[10] М. Б. Младеновић Мирац, *Математико моја*, Власотинце 2021, стр. 290–301.

Иве Андрића 92, Власотинце

E-mail: miracyu@gmail.com