Др Шефкет Арсланагић, мр Даниела Зубовић

НЕЈЕДНАКОСТ СТЕВИН-БОТЕМА

Напомена уредништва. У току припреме за штампу овог чланка примили смо тужну вест да је преминуо др Шефкет Арсланагић, професор у пензији Природно-математичког факултета у Сарајеву. Професор Арсланагић је рођен у Требињу 1942. године, а у својој богатој академској каријери објавио је 60 научних радова из области аналитичких и геометријских неједнакости, преко 600 стручних радова из математике и њене методике, као и 44 књиге посвећене претежно раду са младим математичарима. Уређивао је часопис „Triangle'' а био је сарадник више других часописа, међу њима „Тангенте" и „Наставе математике" које издаје Друштво математичара Србије и у којима је објављено неколико десетина његових чланака. Изражавамо велико жаљење због његовог одласка и најдубље саучешће породици.

У овом чланку ћемо изложити једну занимљиву неједнакост која има велику примјену код доказивања разних важних геометријских неједнакости које важе за елементе троугла. Ријеч је о сљедећој неједнакости:

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2R^2 \geqslant \lambda_2\lambda_3a^2+\lambda_1\lambda_3b^2+\lambda_1\lambda_2c^2, \tag{1}$$

гдје су $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ реални бројеви, те a,b,c дужине страница троугла, а R је полупречник описане кружнице тог троугла. Доказано је да важи и уопштење неједнакости (1) које гласи

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\Big)^2R^2 \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j|A_iA_j|^2, \tag{2}$$

гдје су λ_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ реални бројеви, те $|A_iA_j|$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ дужине страница уписаног полигона $A_1A_2\dots A_n$ у кружницу чији је полупречник R. Неједнакости (1) и (2) потичу од С. Стевина и О. Ботеме[1], па се у литератури по њима и називају.

Докази неједнакости (1) и (2) се могу наћи у књизи [1], стр. 27–29.

Наведене неједнакости, поготово неједнакост (1), имају велики број посљедица које се у [1] могу наћи као познате нејднакости које важе за елементе троугла. Наводимо неке од њих.

Посљедица 1. За $\lambda_1=a^2$, $\lambda_2=b^2$, $\lambda_3=c^2$ добијамо неједнакост 4.4 из [1] која гласи:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4P\sqrt{3},$$

гдје је P површина датог троугла.

[1] S. Stevin (1548–1620), O. Bottema (1901–1992), холандски математичари

Посљедица 2. За $\lambda_1 = a(4s^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2as)$, $\lambda_2 = b(4s^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2bs)$, $\lambda_3 = c(4s^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2cs)$ имамо неједнакост 4.7 из [1] која гласи:

$$4P\sqrt{3} + Q \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 4P\sqrt{3} + 3Q,$$

гдје је s полуобим датог троугла, а $Q = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$.

Посљедица 3. За $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$, $\lambda_3 = c$ из (1) добијамо, редом, сљедеће међусобно еквивалентне неједнакости:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2R^2 &\geqslant a^2bc + b^2ac + c^2ab,\\ (a+b+c)^2 &\geqslant 4RP,\\ 2s \cdot R^2 &\geqslant 4Rrs,\\ R &\geqslant 2r,\end{aligned}$$

гдје су R и r радијуси описане и уписане кружнице датог троугла, а ово је неједнакост 5.1 из [1], позната као Ојлерова неједнакост.

Посљедица 4. За $\lambda_1 = 2s-3a$, $\lambda_2 = 2s-3b$, $\lambda_3 = 2s-3c$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ имамо неједнакост 5.13 из [1] која гласи

$$36r^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2.$$

Посљедица 5. За $\lambda_1 = a(s-a)$, $\lambda_2 = b(s-b)$, $\lambda_3 = c(s-c)$ имамо неједнакост 5.7 из [1] која гласи:

$$2s^2(2R-r) \leqslant R(4R+r)^2.$$

Посљедица 6. За $\lambda_1 = 2s-a$, $\lambda_2 = 2s-b$, $\lambda_3 = 2s-c$ имамо неједнакост 5.25 из [1] која гласи;

$$8r(R-2r) \leqslant Q \leqslant 8R(R-2r).$$

Сада ћемо извести још неке занимљиве неједнакости које следе из Стевин-Ботема неједнакости (1).

Неједнакост 1. Нека су $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, a, b, c су дужине страница троугла и P је његова површина. Тада важи неједнакост

$$a^2x + b^2y + c^2z \geqslant 4P\sqrt{xy + yz + zx}. \tag{3}$$

Доказ. За $\lambda_1 = a^2x$, $\lambda_2 = b^2y$, $\lambda_3 = c^2z$ добијамо из (1):

$$(a^2x + b^2y + c^2z)^2R^2 \geqslant a^2b^2c^2(yz + zx + xy),$$

а одавде, због $abc = 4RP$,

$$(a^2x + b^2y + c^2z)^2R^2 \geqslant 16R^2P^2(yz + zx + xy),$$

односно неједнакост (3).

Једнакост у (3) важи ако и само ако је $a = b = c$, тј. ако је дати троугао једнакостраничан. ■

Неједнакост 2. Нека су $m, n, p > 0$ и нека су a, b, c дужине страница троугла чија је површина P. Тада важи неједнакост

$$a^2 \cdot \frac{m}{n+p} + b^2 \cdot \frac{n}{m+p} + c^2 \cdot \frac{p}{m+n} \geqslant 2\sqrt{3}\,P. \tag{4}$$

Доказ. Стављајући у (3) да је $x = \dfrac{m}{n+p}$, $y = \dfrac{n}{m+p}$, $z = \dfrac{p}{m+n}$ добијамо:

$$a^2 \cdot \frac{m}{n+p} + b^2 \cdot \frac{n}{m+p} + c^2 \cdot \frac{p}{m+n} \geqslant \sqrt{\frac{m}{n+p} \cdot \frac{n}{m+p} + \frac{n}{m+p} \cdot \frac{p}{m+n} + \frac{p}{m+n} \cdot \frac{m}{n+p}} \cdot 4P,$$

што ћемо краће записивати као

$$\sum a^2 \cdot \frac{m}{n+p} \geqslant \sqrt{\sum \frac{m}{n+p} \cdot \frac{n}{m+p}} \cdot 4P. \tag{5}$$

Доказаћемо сада да важи неједнакост

$$\sum \frac{m}{n+p} \cdot \frac{n}{m+p} \geqslant \frac{3}{4}, \quad \text{тј.} \quad 4\sum mn(m+n) \geqslant 3\prod(m+n). \tag{6}$$

Нека је $s = m + n + p$; тада се (6) може записати као

$$4\sum(m^2n + mn^2) \geqslant 3\prod(s-m) = 3\Big[s^2 - sP^2 + \Big(\sum mn\Big)s - mnp\Big],$$

што је еквивалентно са

$$4\sum(m^2n + mn^2) \geqslant 3\Big(\sum mn\Big) - 3mnp,$$

односно $\sum(m^2n+mn^2) \geqslant 6mnp$, а ова неједнакост је тачна на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине за шест позитивних бројева. Дакле, неједнакости (6) су тачне. Сада из њих и неједнакости (5) слиједи неједнакост (4).

Једнакост у неједнакости (4) важи ако и само ако је $m = n = p$ и $a = b = c$. ■

Неједнакост 3. (Неједнакост Сеге-Поја[2]) Нека су a, b, c дужине страница троугла и P његова површина. Тада важи неједнакост

$$a^2b^2c^2 \geqslant \left(\frac{4P}{\sqrt{3}}\right)^3. \tag{7}$$

Доказ. Како је $R = \dfrac{abc}{4P}$, из (1) добијамо да је

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \cdot \frac{a^2b^2c^2}{16P^2} \geqslant a^2\lambda_2\lambda_3 + b^2\lambda_1\lambda_3 + c^2\lambda_1\lambda_2. \tag{8}$$

[2] G. Szegö (1895–1985), G. Polya (1887–1985) – амерички математичари мађарског поријекла

Стављајући $x = \lambda_2\lambda_3$, $y = \lambda_1\lambda_3$ и $z = \lambda_1\lambda_2$ у (3), добијамо

$$a^2\lambda_2\lambda_3 + b^2\lambda_1\lambda_3 + c^2\lambda_1\lambda_2 \geqslant 4P\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}. \tag{9}$$

Сада из (8) и (9) слиједи

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 \cdot \frac{a^2b^2c^2}{16P^2} \geqslant 4P\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)},$$

односно

$$a^2b^2c^2 \geqslant \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\cdot(4P)^3}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2}.$$

Узимајући специјално да је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{1}{3}$, добијамо неједнакост (7). Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$. ∎

Неједнакост 4. Нека су a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 дужине страница двају троуглова, а P_1 и P_2 су њихове површине. Тада важи неједнакост

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \geqslant 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{P_1P_2}. \tag{10}$$

Доказ. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине за три броја имамо

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \geqslant 3\sqrt[3]{(a_1a_2)(b_1b_2)(c_1c_2)} = 3\sqrt[3]{a_1b_1c_1}\cdot\sqrt[3]{a_2b_2c_2},$$

а одавде због (7):

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \geqslant 3\sqrt{\frac{4P_1}{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\frac{4P_2}{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{P_1P_2}.$$

Једнакост у (10) важи ако и само ако је $a_1 = b_1 = c_1$ и $a_2 = b_2 = c_2$, тј. ако су оба троугла једнакостранични. ∎

Неједнакост 5. Нека су a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 дужине страница двају троуглова, а P_1 и P_2 су њихове површине. Тада важи неједнакост

$$\sum a_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) \geqslant 16P_1P_2. \tag{11}$$

Доказ. Нека је $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ и $x = b_2^2 + c_2^2 - a_2^2$, $y = a_2^2 + c_2^2 - b_2^2$, $z = a_2^2 + b_2^2 - c_2^2$. Тада из (3) добијамо

$$\sum a_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) \geqslant \sqrt{\sum (b_2^2 + c_2^2 - a_2^2)(a_2^2 - b_2^2 + c_2^2)}\cdot 4P_1. \tag{12}$$

Такође имамо

$$\begin{aligned}\sum(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2)(a_2^2 - b_2^2 + c_2^2) &= \sum(c_2^4 - b_2^4 - a_2^4 + 2a_2^2b_2^2)\\ &= 2\sum a_2^2b_2^2 - \sum(c_2^4 - b_2^4 - a_2^4) = 2\sum a_2^2b_2^2 - \sum a_2^4 = 16P_2^2.\end{aligned} \tag{13}$$

Сада из (12) и (13) слиједи неједнакост (11). Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = b_1 = c_1$ и $a_2 = b_2 = c_2$. ■

ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1969.

[2] P. G. Popescu, I. V. Maftei, J. L. Diaz-Barrero, M. Dinca, *Inequalitati matematice – Modele inovatore*, Editura didactica si pedagogica, R. A., Bucureşti, 2007.

Д.З.: Природно-математички факултет, Универзитет у Сарајеву, Босна и Херцеговина

E-mail: dzubovic@pmf.unsa.ba