Др Игор Уљаревић

ОД ЈЕДНАЧИНЕ ТРАНСПОРТА ДО МЕТОДА КАРАКТЕРИСТИКА

Апстракт. У овом раду изложен је природан начин за увођење метода карактеристика, значајне геометријске технике за рјешавање широке класе парцијалних диференцијалних једначина првог реда. Полазна тачка је физички мотивисана једначина транспорта која описује промјене скаларне величине услијед кретања флуида.

1. Увод

Једначина транспорта је специјалан случај адвекционо-дифузионе једначине која описује промјене одређених особина флуида изражених скаларним функцијама. Такве особине су, на примјер, температура, салинитет, или општије концентрација неке супстанце. Промјена једне овакве скаларне функције с протоком времена одвија се сљедујући два принципа:

1. принцип дифузије и
2. принцип адвекције.

Дифузија је спонтано усредњавање. Промјена услијед дифузије дешава се чак и када флуид мирује. Дифузија је разлог зашто флуид у стању мировања такође мијења температуру, осим ако његова температура већ није хармонично расподијељена. С друге стране, адвекција се односи на промјену скаларне величине која настаје искључиво под утицајем кретања флуида. Једначина транспорта узима у обзир само адвекцију, то јест занемарује било какве промјене настале под утицајем дифузије. У природи су појаве у којима се дифузија може занемарити ријетке. Примјери таквих појава су кретање Бозе-Ајнштајновог кондензата и, мање поетично, кретање отпада на површини океана.

У одјељку 2 извешћемо једначину транспорта из закона одржања. У одјељку 3 ријешићемо једначину транспорта под претпоставком да је флуид нестишљив. Одјељак 4 је посвећен методу карактеристика који је, између осталог, примјењлив на једначину транспорта и у случају када флуид није нестишљив.

2. Извођење једначине транспорта

У овом одјељку извешћемо једначину транспорта из закона одржања. Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ отворен подскуп који представља простор у коме се флуид креће. Нека је $I \subset \mathbb{R}$ отворен интервал који садржи 0 и који представља временски интервал.

Нека је $V\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ векторско поље које представља брзину флуида и нека је ϕ ток флуида, то јест $\phi_t(p) \in \Omega$ је позиција у којој се налази тачка $p \in \Omega$ у тренутку $t \in I$. Означићемо са $u\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$ скаларну функцију чију промјену желимо да опишемо. Сљедећи закон одржања математички изражава непостојање промјене услијед дифузије.

Закон одржања. *За произвољан отворен подскуп $D \subset \Omega$ такав да је $\overline{D}$ компактан подскуп скупа Ω, број $\int_{\phi_t(D)} u(p,t)\,dp$ не зависи од t.*

Ако $u(\cdot,t)$ представља густину у тренутку t, тада закон одржања говори да се маса скупа D не мијења при току флуида. Другим ријечима, масе скупова D и $\phi_t(D)$ су исте за све t. У општем случају, $\phi_t(D)$ није дефинисано за све $t \in I$. Међутим јесте за t довољно близу 0 јер је $\overline{D}$ компактан подскуп скупа Ω. Због тога закон одржања треба схватити на сљедећи начин: $\int_{\phi_t(D)} u(p,t)\,dp$ не зависи од t ако је t такво да овај израз има смисла.

Теорема 2.1. *У ситуацији овог одјељка, ако глатка функција $u\colon \Omega\times I \to \mathbb{R}$ задовољава закон одржања у односу на векторско поље $V\colon \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$, тада важи*

$$\partial_t u + \operatorname{div}(uV) = 0. \tag{1}$$

Доказ. Означимо са ϕ ток векторског поља V. Из закона одржања слиједи $\frac{d}{dt}\int_{\phi_t(D)} u(p,t)\,dp = 0$, при чему dp означава диференцијалну форму $dp_1 \wedge dp_2 \wedge \cdots \wedge dp_n$. Користећи теорему о смјени промјенљиве у интегралу на језику диференцијалних форми и Картанову формулу, добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\int_{\phi_t(D)} u(p,t)\,dp = \frac{d}{dt}\int_D \phi_t^*(u\,dp) = \int_D \frac{d}{dt}\phi_t^*(u\,dp) \\ &= \int_D \phi_t^*\left(\partial_t u\,dp + V\lrcorner d(u\,dp) + d(V\lrcorner(u\,dp))\right). \end{aligned}$$

Диференцијална форма $d(u\,dp)$ је $n+1$ форма на n димензионом простору, па је зато једнака 0. С друге стране,

$$d(V\lrcorner(u\,dp)) = d((uV)\lrcorner\,dp) = \operatorname{div}(uV)\,dp.$$

Слиједи

$$0 = \int_D \phi_t^*\left(\partial_t u + \operatorname{div}(uV)\right)\,dp.$$

Пошто ова формула важи за произвољан отворен скуп D чије је затворење компактан подскуп скупа Ω, важи $\partial_t u + \operatorname{div}(uV) = 0$. ∎

Диференцијална једначина (1) назива се *једначина транспорта* или *једначина адвекције*. Сљедеће тврђење садржи еквивалентан облик једначине транспорта за векторска поља чија је дивергенција једнака 0. Геометријски, оваква векторска поља генеришу токове који чувају запремину.

Посљедица 2.2. *У ситуацији теореме* 2.1, *ако је дивергенција векторског поља* V *једнака* 0, *тада је једначина транспорта еквивалентна са* $\partial_t u + \nabla u \cdot V = 0$. *Овдје,* ∇u *означава градијент функције* u *у односу на* $p = (p_1, \dots, p_n)$, *то јест* $\nabla u = (\partial_{p_1} u, \dots, \partial_{p_n} u)$.

Доказ. Тврђење слиједи из теореме 2.1 и $\operatorname{div}(uV) = \nabla u \cdot V + u \cdot \operatorname{div} V$. ∎

3. Рјешавање једначине транспорта

Сљедећа теорема описује рјешење једначине транспорта за константно векторско поље.

Теорема 3.1. *Нека је* $V \in \mathbb{R}^n$ *и нека је* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *глатка функција. Тада је рјешење* $u\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *парцијалне диференцијалне једначине*

$$\partial_t u + V \cdot \nabla u = 0,$$

које задовољава почетни услов $u(p,0) = f(p)$ *за све* $p \in \mathbb{R}^n$, *дато са* $u(p,t) = f(p - t \cdot V)$.

Доказ. Непосредно се провјерава да $(p,t) \mapsto f(p - t \cdot V)$ јесте рјешење. Докажимо да је свако рјешење овога облика. Нека је $u\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ произвољно рјешење једначине транспорта које задовољава почетни услов $u(p,0) = f(p)$ за све $p \in \mathbb{R}^n$. Доказаћемо да је u константно дуж правих у $\mathbb{R}^{n+1}$ које су паралелне вектору $(V,1)$. Нека је $\gamma(t) = (p + tV, s + t)$ параметризација једне такве праве. Тада важи

$$\frac{d}{dt} u(\gamma(t)) = (\partial_t u)(\gamma(t)) + \nabla u(\gamma(t)) \cdot V(\gamma(t)) = 0.$$

Дакле, $u(\gamma(t))$ не зависи од t. Слиједи

$$u(p,s) = u(\gamma(0)) = u(\gamma(-s)) = u(p - s \cdot V, 0) = f(p - s \cdot V). \quad ∎$$

Наредна теорема је уопштење претходне. Она описује рјешења парцијалне диференцијалне једначине $\partial_t u + V \cdot \nabla u = 0$ за аутономно векторско поље $V\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ чији је ток глобално дефинисан. Ова једначина јесте једначина транспорта под претпоставком да V генерише нестишљив ток, односно под претпоставком да важи $\operatorname{div} V = 0$.

Теорема 3.2. *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *отворен подскуп. Нека је* $V\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *глатко векторско поље чији је ток глобално дефинисан и нека је* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *глатка функција. Тада је рјешење* $u\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *парцијалне диференцијалне једначине* $\partial_t u + V \cdot \nabla u = 0$, *које задовољава почетни услов* $u(p,0) = f(p)$ *за све* $p \in \Omega$, *дато са* $u(p,t) = f\left(\phi_t^{-1}(p)\right)$. *Овдје је са* ϕ *означен ток векторског поља* V.

Доказ. Докажимо прво да $u(p,t) = f(\phi_t^{-1}(p))$ јесте рјешење једначине транспорта. Пошто је V аутономно векторско поље, важи

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_t^{-1}(p)\right) = -V\left(\phi_t^{-1}(p)\right).$$

Слиједи

$$\partial_t u(p,t) = df\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_t^{-1}(p)\right)\right) = -\nabla f\left(\phi_t^{-1}(p)\right)\cdot V\left(\phi_t^{-1}(p)\right). \tag{2}$$

С друге стране,

$$\nabla u(p,t)\cdot V(p) = df\left(D(\phi_t^{-1})(p)V(p)\right) = df\left(V(\phi_t^{-1}(p))\right). \tag{3}$$

У посљедњој једнакости користили смо да је V инваријантно у односу на свој ток, то јест $D(\phi_t^{-1})(p)V(p) = V(\phi_t^{-1}(p))$. Једнакости (2) и (3) имплицирају $\partial_t u + \nabla u \cdot V = 0$. Дакле, u јесте рјешење једначине транспорта. Непосредно се провјерава да u задовољава почетни услов $u(p,0) = f(p)$.

Нека је сада $u\colon \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ неко рјешење једначине транспорта које задовољава почетни услов $u(p,0) = f(p)$. Доказаћемо да важи $u(p,t) = f(\phi_t^{-1}(p))$ за све $(p,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$. Нека је $W\colon \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n+1}$ аутономно векторско поље на $\Omega\times\mathbb{R}$ дато са $W(p,s) := (V(p),1)$. Ток $\psi_t : \Omega\times\mathbb{R}\to\Omega\times\mathbb{R}$ векторског поља W дат је са $\psi_t(p,s) = (\phi_t(p), t+s)$. Заиста

$$\partial_t\psi(p,s) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_t(p), s+t\right) = (\partial_t\phi_t(p),1) = (V(\phi_t(p)),1) = W(\psi_t(p,s)).$$

Докажимо сада да је u константно дуж линија тока ψ_t, то јест да је константно дуж интегралних кривих векторског поља W. Важи сљедеће

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(u(\psi_t(p,s))\right) &= Du\left(\partial_t\psi_t(p,s)\right) = Du(W(\psi_t(p,s))) = Du(V(\phi_t(p)),1)\\ &= (\partial_t u)(\phi_t(p), s+t)\cdot 1 + \nabla u(\phi_t(p), s+t)\cdot V(\phi_t(p)) = 0.\end{aligned}$$

Дакле, $u(\psi_t(p,s))$ не зависи од t. Сљедећи низ једнакости завршава доказ

$$u(p,t) = u(\psi_0(p,t)) = u(\psi_{-t}(p,t)) = u(\phi_{-t}(x),0) = f(\phi_t^{-1}(p)). \quad \blacksquare$$

4. Метод карактеристика

Једначина транспорта $\partial_t u + \operatorname{div}(uV) = 0$ је примјер квазилинеарне парцијалне једначине првог реда, то јест диференцијалне једначине облика

$$a_1(p,u)\partial_{p_1}u + \cdots + a_n(p,u)\partial_{p_n}u = b(p,u). \tag{4}$$

У овом поглављу описаћемо један метод за рјешавање диференцијалних једначина овог типа, који се зове *метод карактеристика*. Овај метод је по својој природи геометријски. Његов први корак јесте промјена перспективе: умјесто тражења непознате функције u, тражићемо њен график Γ_u. График Γ_u је хиперповрш у $(n+1)$-димензионом простору. Другим ријечима, $\Gamma(u)$ је подмногострукост $(n+1)$-димензионог простора, чија је димензија једнака n. Други корак је геометријска интерпретација квазилинеарне једначине. Функција u задовољава једначину (4) ако, и само ако, њен график јесте тангентан на одређено векторско поље, које зовемо *карактеристично векторско поље* једначине (4). Ово тврђење је предмет сљедеће леме.

Лема 4.1. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ отворен подскуп и нека су $a_1, \dots, a_n, b : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатке функције. Нека је $V : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ аутономно векторско поље на $\Omega \times \mathbb{R}$ дато са*

$$V(p, s) := (a_1(p, s), \dots, a_n(p, s), b(p, s)).$$

Тада је функција $u : \Omega \to \mathbb{R}$ рјешење диференцијалне једначине (4) ако, и само ако, график Γ_u функције u јесте тангентан на векторско поље V у свакој својој тачки.

Доказ. График функције u је подмногострукост од $\Omega \times \mathbb{R}$ која је дата са

$$\Gamma_u := \{(p, u(p)) \mid p \in \Omega\}.$$

График Γ_u може да се представи као $F_u = f^{-1}(0)$ гдје је $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатка функција дата са $f(p, s) := u(p) - s$. Притом, 0 је регуларна вриједност функције f. Да ли је неки вектор ξ тангентан на Γ_u или не, може се провјерити помоћу градијента функције f. Наиме, ξ је тангентан на Γ_u у тачки $(p_0, u(p_0))$ ако, и само ако, важи $\nabla f(p_0, u(p_0)) \perp \xi$, то јест $\nabla f(p_0, u(p_0)) \cdot \xi = 0$. Примјењујући ово запажање на векторско поље V, закључујемо да је график Γ_u тангентан на векторско поље V у свакој својој тачки ако, и само ако, важи $\nabla f(p, u(p)) \cdot V(p, u(p)) = 0$ за све $p \in \Omega$. Пошто је

$$\nabla f(p, u(p)) = (\partial_{p_1} u(u), \dots, \partial_{p_n} u(p), -1),$$

график Γ_u је тангентан на V у свакој својој тачки ако, и само ако, важи

$$a_1(p, u(p))\partial_{p_1} u(p) + \dots + a_n(p, u(p))\partial_{p_n} u(p) - b(p, u(p)) = 0.$$

Овим је доказано тврђење леме. ∎

За подмногострукост $M \subset \Omega$ кажемо да је интегрална подмногострукост векторског поља $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ако је вектор $V(p)$ тангентан на M у тачки p за све $p \in M$. У основи метода карактеристика лежи сљедеће тврђење: подмногострукост је интегрална ако, и само ако, она се раслојава на интегралне криве.

Теорема 4.2. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ отворен подскуп и нека је $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ глатко векторско поље. Глатка подмногострукост (без границе) $M \subset \Omega$ јесте интегрална подмногострукост векторског поља V ако, и само ако, важи сљедеће тврђење: за сваку интегралну криву γ векторског поља V, подскуп (временског интервала) $\gamma^{-1}(M)$ јесте отворен.*

Доказ. Претпоставимо да је инверзна слика подмногострукости M у односу на било коју интегралну криву векторског поља V отворен подскуп временског интервала. Нека је $p \in M$ произвољна тачка и нека је $\gamma : I \to \Omega$ интегрална крива векторског поља V таква да важи $\gamma(0) = p$. Пошто је $\gamma^{-1}(M)$ отворен подкуп интервала I који садржи 0, постоји $\varepsilon > 0$ такво да $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I$ и такво да $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$. Одавде слиједи $V(\gamma(0)) = \gamma'(0) \subset T_{\gamma(0)}M$, то јест V је тангентно на M у тачки $p = \gamma(0)$. Пошто је p произвољно изабрана тачка подмногострукости M, векторско поље V је тангентно на M у свакој њеној тачки. Дакле, M је интегрална подмногострукост векторског поља V.

Докажимо сада обрнути смјер. Претпоставимо да је M интегрална подмногострукост векторског поља V. Означимо са m димензију подмногострукости M. Пошто је $M \subset \Omega$ подмногострукост, за сваку тачку $p \in M$ постоје околина координатног почетка $U \subset \mathbb{R}^n$, околина $O \subset \Omega$ тачке p и дифеоморфизам $\phi\colon U \to O$ такав да важи

1. $\phi(0) = p$,
2. $\phi\left(U \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})\right) = O \cap M$.

Зато је довољно доказати тврђење за случај $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $M = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Пошто је $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ интегрална подмногострукост векторског поља V, рестрикција V на $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ има сљедећи облик

$$(\forall p \in \mathbb{R}^m \times \{0\}) \quad V(p) = (V^1(p), \dots, V^m(p), 0 \dots, 0),$$

гдје су $V^1, \dots, V^m : \mathbb{R}^m \times \{0\} \to \mathbb{R}$ одређене глатке функције. Нека је $\overline{V} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ векторско поље дефинисано са

$$\overline{V}(p_1, \dots, p_m) := \left(V^1(p), \dots, V^m(p)\right),$$

гдје је $p = (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Ако је $\overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^m$ интегрална крива векторског поља $\overline{V}$, тада је

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \ : \ t \mapsto (\overline{\gamma}(t), 0, \dots, 0)$$

интегрална крива векторског поља V. Одавде, и из јединствености рјешења Кошијевог проблема, слиједи да ако $\gamma(t_0) \in M$ за неку интегралну криву γ векторског поља V и за неки тренутак t_0 из временског интервала, тада постоји $\varepsilon > 0$ такво да $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subset M$. Другим ријечима, скуп $\gamma^{-1}(M)$ је отворен. ■

Претходна теорема заправо своди рјешавање диференцијалне једначине (4) на рјешавање обичних диференцијалних једначина првог реда. Заиста, пошто је график рјешења једначине (4) интегрална подмногострукост одговарајућег карактеристичног векторског поља, он се (на основу теореме 4.2) може реконструисати као унија одређене фамилије интегралних кривих тог карактеристичног векторског поља. Дакле, ако су интегралне криве карактеристичног векторског поља познате, тада су позната и рјешења парцијалне диференцијалне једначине (4), а тражење интегралних кривих неког векторског поља еквивалентно је рјешавању одговарајуће обичне диференцијалне једначине првог реда. Интегралне криве карактеристичног векторског поља зову се *карактеристике*. Отуда и назив „метод карактеристика“.

Размотримо сада Кошијев проблем, то јест проблем са почетним условом, за парцијалну квазилинеарну диференцијалну једначину првог реда. Нека је $\Pi \subset \mathbb{R}^n$

глатка подмногострукост димензије $n-1$ и нека је $f\colon \Pi \to \mathbb{R}$ глатка функција. Кошијев проблем за диференцијалну једначину (4) са почетним условом f на подмногострукости Π састоји се у налажењу рјешења u диференцијалне једначине (4) које задовољава $u(p) = f(p)$ за све $p \in \Pi$.

Теорема 4.3. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ отворен подскуп, нека је $\Pi \subset \Omega$ глатка подмногострукост димензије $n-1$ и нека су $a_1, \ldots, a_n, b : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f : \Pi \to \mathbb{R}$ глатке функције. Претпоставимо да вектор*

$$(a_1(p_0, f(p_0)), \ldots, a_n(p_0, f(p_0)))$$

није тангентан на подмногострукост Π за неку тачку $p_0 \in \Pi$. Тада постоји околина $\mathcal{O} \subset \Omega$ тачке p_0 и јединствено рјешење $u\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ диференцијалне једначине

$$a_1(p,u)\partial_{p_1} u + \cdots + a_n(p,u)\partial_{p_n} u = b(p,u) \tag{5}$$

које задовољава почетни услов $u(p) = f(p)$ за све $p \in \Pi \cap \mathcal{O}$.

Доказ. Означимо са ϕ ток карактеристичног векторског поља. Постоје $\varepsilon_1 > 0$ и околина $\mathcal{O}_1$ тачке p_0 такви да је $\phi_t(p)$ добро дефинисано за $p \in \mathcal{O}_1$ и $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Из услова теореме слиједи да карактеристично векторско поље није тангентно на подмногострукост $\{(p, f(p)) \mid p \in \Pi\}$ у тачки $(p_0, f(p_0))$. Као посљедица, постоје околина $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ тачке p_0 и $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ такви да је скуп

$$S := \{\phi_t(p, f(p)) \mid p \in \Pi \cap \mathcal{O}_2, t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)\}$$

хиперповрш у $\Omega \times \mathbb{R}$. Пошто је извод пројекције

$$d\pi : T_{(p,f(p))}S \to T_p\Omega$$

изоморфизам за $p \in \Pi \cap \mathcal{O}_2$, постоје околина $\mathcal{O}_3 \subset \mathcal{O}_2$ тачке p_0 и $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)$ такви да је хиперпорвш

$$S' := \{\phi_t(p, f(p)) \mid p \in \Pi \cap \mathcal{O}_3, t \in (-\varepsilon_3, \varepsilon_3)\}$$

график неке глатке функције $u\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. График $S' = \Gamma_u$ функције u се раслојава, по конструкцији, на интегралне криве карактеристичног векторског поља, па лема 2.1 и теорема 4.2 имплицирају да је u рјешење диференцијалне једначине (5).

Јединственост рјешења на $\mathcal{O}$ слиједи из јединствености рјешења Кошијевог проблема за обичне диференцијалне једначине. ■

Илустроваћемо сада метод карактеристика рјешавањем једначине транспорта за векторско поље чији ток није стишљив. Нека је $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ векторско поље на $\mathbb{R}^n$ дато са $V(p) = p$. Нека је $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функција дата са $f(p) = e^{-|p|^2}$. Наћи ћемо рјешење u једначине транспорта

$$\partial_t u + \operatorname{div}(uV) = 0 \tag{6}$$

које задовољава почетни услов $u(p,0)=f(p)$. Једначина (6) је еквивалентна са

$$\partial_t u+\sum_{j=1}^{n} p_j\partial_{p_j}u=-nu.$$

Ово је квазилинеарна парцијална диференцијална једначина по $n+1$ промјенљивих. Њено карактеристично векторско поље је једнако

$$W:(t,p_1,\dots,p_n,s)\mapsto(1,p_1,\dots,p_n,-ns).$$

Крива $x=(x_t,x_1,\dots,x_n,x_s)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n+2}$ је интегрална крива карактеристичног векторског поља W ако, и само ако, она јесте рјешење сљедећег система обичних диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x_t'&=1,\\ x_j'&=x_j,\quad j\in\{1,\dots,n\},\\ x_s'&=-nx_s. \end{aligned}$$

Дакле, x је интегрална крива векторског поља W ако, и само ако, важи

$$x(z)=\big(z+c_t,c_1e^z,\dots,c_ne^z,c_se^{-nz}\big)$$

за неке константе $c_t,c_1,\dots,c_n,c_s\in\mathbb{R}$. С обзиром на почетни услов $u(p,0)=e^{-|p|^2}$, график Γ_u непознате функције u садржи подмногострукост

$$\big\{\big(0,p,e^{-|p|^2}\big)\mid p\in\mathbb{R}^n\big\}.$$

Подмногострукост $\{0\}\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ одговара подмногострукости Π из теореме 4.3. График Γ_u добићемо као унију свих (слика) интегралних кривих карактеристичног векторског поља које сијеку $\big\{\big(0,p,e^{-|p|^2}\big)\big\}$. Означимо са $x_p, p\in\mathbb{R}^n$ интегралну криву од W за коју важи $x_p(0)=\big(0,p,e^{-|p|^2}\big)$. Експлицитно

$$x_p(z)=\big(z,p\cdot e^z,e^{-|p^2|-nz}\big).$$

Дакле, $\Gamma_u=\bigcup_{p\in\mathbb{R}^n}x_p(\mathbb{R})$. То јест,

$$\{(t,p,u(p))\mid t\in\mathbb{R},p\in\mathbb{R}^n\}=\big\{\big(z,qe^z,e^{-|q|^2-nz}\big)\mid z\in\mathbb{R},q\in\mathbb{R}^n\big\}.$$

Да бисмо нашли $u(t,p)$ треба да нађемо z и q такве да важи $(t,p,u(p))=\big(z,qe^z,e^{-|q|^2-nz}\big)$. Овај услов јединствено одређује $z=t$ и $q=pe^{-t}$. Слиједи $u(t,p)=e^{-nt-e^{-2t}\cdot|p|^2}$. ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1992.

[2] V. I. Arnol'd, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer Science & Business media, 2012.

[3] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons, 2008.

Математички факултет, Студентски трг 16, Београд

E-mail: igor.uljarevic@matf.bg.ac.rs