НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXVIII, 1-2 (2023), 5–14

**Др Миодраг Матељевић, др Марек Светлик**

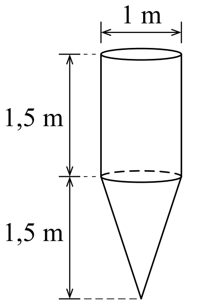
# ЕЛЕМЕНТИ МЕТОДА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈЕ И ФУНКЦИОНАЛНОГ МИШЉЕЊА

*Посвећено успомени на академика Милосава Марјановића*

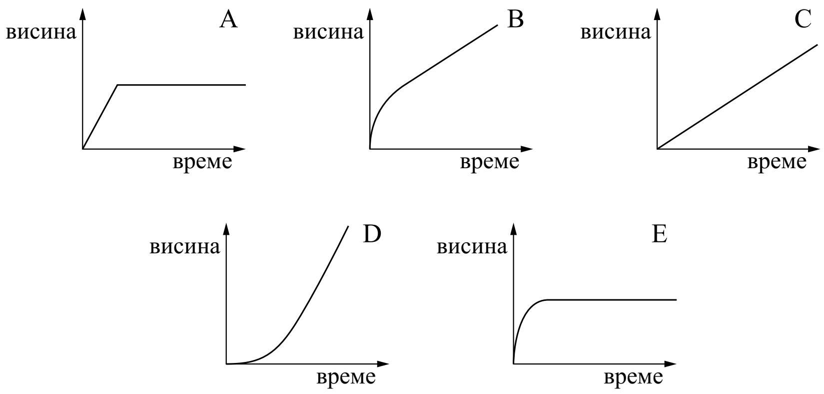
## 1. Увод

За почетак размотримо један задатак који се појавио на ПИСА тестирању 2000. године [6].

Задатак 1. Резервоар за воду има облик и димензије као на слици 1. У почетку резервоар је празан. Затим је напуњен водом, брзином пуњења од 1 литра у секунди. Који од графика приказаних на слици 2 приказује како се висина нивоа воде мења током времена?



Сл. 1. Резервоар



Сл. 2. Графици

---

Излагање на ову тему аутори су одржали на Државном семинару о настави математике и рачунарства, јануара 2023. године у Београду.

Одговор на постављено питање у овом задатку јесте: график B. Постоје разни начини да се овај одговор образложи. Једно од интуитивних образложења које су аутори овог текста имали прилике да чују гласило је: „Како се посуда шири – спорије се пуни“.

Покушајмо да дамо образложење на нивоу петнаестогодишњака (узраст ученика који учествују на ПИСА тестирању).

Пуњење резервоара почиње у тренутку $t = 0$, а завршава се у тренутку $t = T$, за неко $T > 0$. Можемо сматрати да је висина нивоа воде у резервоару функција $h : [0, T] \to [0, +\infty)$. Подсетимо се да функцију $f$ из непразног скупа $X$ у непразан скуп $Y$ можемо схватити као правило придруживања којим се сваком елементу скупа $X$ придружује тачно један елемент скупа $Y$. Све у свему, потребно је да одредимо који од графика приказаних на слици 2 јесте график функције $h$. Како је запремина дела резервоара облика ваљка три пута већа од запремине дела резервоара облика купе и брзина уливања воде константна, закључујемо да се „купа“ пуни током временског интервала $\Big[0, \dfrac{T}{4}\Big]$, а „ваљак“ током временског интервала $\Big[\dfrac{T}{4}, T\Big]$. Интуитивно је јасно („купа се шири“) да важи

$$h\Big(\frac{T}{4}\Big) - h\Big(\frac{T}{8}\Big) < h\Big(\frac{T}{8}\Big) - h(0), \tag{1}$$

као и

$$h(T) - h\Big(\frac{3T}{4}\Big) = h\Big(\frac{3T}{4}\Big) - h\Big(\frac{T}{2}\Big) = h\Big(\frac{T}{2}\Big) - h\Big(\frac{T}{4}\Big). \tag{2}$$

Што се графика зависности висине нивоа воде у резервоару тиче, постоје две могућности:

а) график је скициран на интервалу $[0, T]$;

б) график је скициран на интервалу $[0, T_1]$, где је $T_1 > T$.

Ако је тачно б) у „ужи избор’“ улазе графици A и E.

Ако је тачно а) у „ужи избор“ улазе графици B, C и D.

Приметимо да за график A није испуњено (1), док за график E није испуњено (2). Стога, нити један од графика A и E сигурно није график функције $h$, односно б) није тачно. Даље, приметимо да за графике C и D није испуњено (1). Стога, нити један од графика C и D сигурно није график функције $h$. Коначно, график функције $h$ јесте график B.

Приметимо да конкретна вредност брзине уливања воде у резервоар није есенцијална. Битно је само да је та брзина константна, тј. да се у једнаким временским интервалима сипају једнаке запремине воде. Такође, ни конкретне вредности димензија резервоара нису есенцијалне. За облик графика битан је само облик резервоара. Ипак, те димензије (прецизније чињеница да је запремина дела резервоара облика „ваљка“ три пута већа од запремине дела резервоара облика „купе“) помогле су нам да дамо образложење шта је тачан одговор.

Поменимо још и да су проблем постављен у задатку 1 и неке његове варијанте детаљно обрађени у раду [4].

## 2. Аналитички израз функције која представља висину нивоа воде у резервоару

У приказаном образложењу одговора на питање постављено у задатку 1 нисмо експлицитно изразили чему је једнака висина нивоа воде у зависности од времена. С обзиром на то да су дате конкретне димензије резервоара, можемо ли одредити експлицитни аналитички израз којим је дата функција $h$? Можда је то погодан задатак за ученике када се у средњој школи обрађује наставна тема „Функције“.

Нека је:

- $v_0$ брзина уливања воде у резервоар изражена у $\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}$ (у овом случају $v_0 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}$);
- $R$ полупречник основа купе и ваљка изражен у $\mathrm{m}$ (у овом случају $R = 0{,}5$ m);
- $H$ висина купе и висина ваљка изражена у $\mathrm{m}$ (у овом случају $H = 1{,}5\,\mathrm{m}$).

За почетак одредимо домен и кодомен функције $h$. За кодомен можемо узети $\mathbb{R}$, $[0, +\infty)$ или $[0, 2H]$. У сваком случају скуп слика (скуп вредности) функције јесте $[0, 2H]$. Да бисмо одредили домен функције, треба да одредимо $T$, односно време потребно да се резервоар напуни до врха. Приметимо да је $T$ једнако четворострукој вредности времена потребног да се напуни део резервоара облика купе. Ако је део резервоара облика купе напуњен до врха, онда је запремина воде која се налази у том делу резервоара с једне стране једнака

$$v_0\frac{T}{4}, \tag{3}$$

док је с друге стране та запремина једнака

$$\frac{1}{3}R^2\pi H. \tag{4}$$

Из (3) и (4) добијамо $v_0\frac{T}{4} = \frac{1}{3}R^2\pi H$, тј. $T = \frac{4R^2\pi H}{3v_0}$. Дакле, домен функције $h$ јесте $\left[0, \frac{4R^2\pi H}{3v_0}\right]$, односно

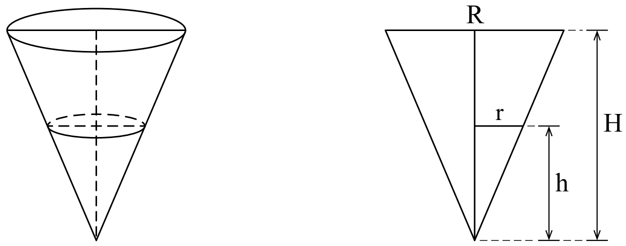
$$h : \left[0, \frac{4R^2\pi H}{3v_0}\right] \to [0, 2H].$$

Одредимо сада експлицитни аналитички израз за функцију $h$.

Најпре одредимо $h = h(t)$ за $t \in \left[0, \frac{T}{4}\right]$. Приметимо да у том случају важи

$$v_0 t = \frac{1}{3}r^2\pi h.$$

Како бисмо одредили везу $r$ и $h$ посматрајмо слику 3.



Сл. 3. Део резервоара облика купе

На основу сличности одговарајућих троуглова важи $\dfrac{r}{h} = \dfrac{R}{H}$. Отуда је

$$h = h(t) = \sqrt[3]{\frac{3H^2v_0}{R^2\pi}}\,\sqrt[3]{t}.$$

Одредимо $h = h(t)$ за $t \in \left[\dfrac{T}{4}, T\right]$. У том случају важи

$$v_0\Big(t - \frac{T}{4}\Big) = R^2\pi(h - H).$$

Отуда је

$$h = h(t) = \frac{v_0}{R^2\pi}t + \frac{2}{3}H.$$

Дакле, $T = \dfrac{4R^2\pi H}{3v_0}$, а функција $h : [0, T] \to [0, 2H]$ дефинисана је са

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{3H^2v_0}{R^2\pi}}\,\sqrt[3]{t}, & t \in \left[0, \frac{T}{4}\right], \\ \dfrac{v_0}{R^2\pi}t + \dfrac{2}{3}H, & t \in \left[\frac{T}{4}, T\right]. \end{cases}$$

Приметимо да функција $h$ има следећа својства:

1) $h(0) = 0$;
2) строго је растућа на свом домену;
3) непрекидна је на свом домену;
4) конкавна је на свом домену.

Интересантно је испитати да ли је функција $h$ непрекидно диференцијабилна у тачки $t = \dfrac{T}{4}$. Тај задатак остављамо заинтересованим читаоцима за вежбу, а у наредном одељку ћемо посредно показати да је одговор потврдан.

## 3. Уливање воде у посуду која има облик ротационе површи – директан проблем

У овом одељку разматрамо поменути проблем уливања воде у резервоар одговарајућег облика, при чему пре свега испитујемо својства функције висине помоћу основних тврђења математичке анализе. На основу тога, сматрамо да разматрање овог проблема може да буде добар задатак за ученике четврте године средње школе и прве године факултета. Наиме, приликом разматрања овог проблема ученици и студенти могу видети директну примену великог броја основних тврђења математичке анализе која се односе на монотоност, непрекидност, диференцијабилност, конвексност и интеграбилност реалних функција реалне променљиве.

Нека је $H > 0$ и нека је дата функција $r : [0, H] \to \mathbb{R}$, са следећим својствима:

(r1) $r$ је непрекидна на $[0, H]$;

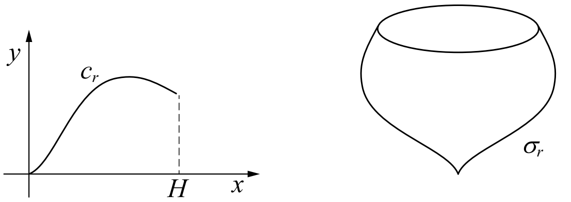
(r2) $r(x) > 0$ за $x \neq 0$.

Ротацијом криве

$$c_r = \{(0, y) : y \in [0, r(0)]\} \cup \{(x, r(x)) : x \in [0, H]\}$$

око $x$-осе добијамо површ $\sigma_r$.

Површ $\sigma_r$ интерпретирамо као границу резервоара, а криву $c_r$ називамо *генератриса резервоара.* Поставимо тај резервоар (који такође обележавамо са $\sigma_r$) тако да његова оса ротације буде у вертикалном положају (слика 4) и кроз горњи део сипамо воду константном брзином $v_0$ (у једнаким интервалима времена улива се једнака запремина воде).



Сл. 4. Генератриса резервоара и резервоар

Претпоставимо да процес уливања воде у резервоар $\sigma_r$ почиње у тренутку $t = 0$ и завршава се у тренутку $t = T$, када је резервоар у потпуности напуњен. Размотримо зависност висине нивоа воде у резервоару од времена. Ако са $h(t)$ обележимо висину нивоа воде у резервоару у тренутку $t$, функцију $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ називамо *функција висине.*

Јасно је да је до тренутка $t \in [0, T]$ запремина воде која је сипана у резервоар једнака $v_0 t$. С друге стране, коришћењем одговарајуће формуле за запремину ротационог тела (видети, на пример одељак „Запремина обртних тела“ у [1]) добијамо да је та запремина једнака

$$\pi \int_0^{h(t)} r^2(\xi)\, d\xi.$$

Дакле, за свако $t \in [0, T]$ важи једнакост

$$v_0 t = \pi \int_0^{h(t)} r^2(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Отуда, можемо закључити да је функција $h$ инверзна функција функције $g : [0, H] \to \mathbb{R}$ дефинисане са

$$g(x) = \frac{\pi}{v_0} \int_0^x r^2(\xi)\, d\xi. \tag{6}$$

Заиста, за свако $t \in [0, T]$ важи $t = g(h(t))$. Такође важи

$$T = h^{-1}(H) = g(H).$$

На основу дефиниције функције $g$ и чињенице да је $h = g^{-1}$ може се показати да функција $h$ има следећа својства:

(h1) $h$ је строго растућа и непрекидна на $[0, T]$;

(h2) $h(0) = 0$.

Заиста, функција $g$ је строго растућа и непрекидна (видети, на пример, став 8.3.1 у [1]), па је таква и функција $h$ као инверзна функција функције $g$ (видети, на пример, теорему 5.5.2 у [1]).

С друге стране и интуитивно је јасно да функција $h$ има својства (h1) и (h2).

Штавише, како је функција $r$ непрекидна следи да је функција $g$ непрекидно диференцијабилна. Стога, на основу (6), формуле за диференцирање интеграла по горњој граници и формуле за извод инверзне функције ($h' = \dfrac{1}{(h^{-1})' \circ h} = \dfrac{1}{g' \circ h}$) добијамо следећи

Став 1.

а) *Ако је* $r(0) \neq 0$, *онда за свако* $t \in [0, T]$ *важи* $h'(t) = \dfrac{v_0}{\pi r^2(h(t))}$.[1]

б) *Ако је* $r(0) = 0$, *онда за свако* $t \in (0, T]$ *важи* $h'(t) = \dfrac{v_0}{\pi r^2(h(t))}$.

Даље, као непосредну последицу става 1 добијамо

Став 2.

а) *Ако је* $r(0) \neq 0$, *онда је функција* $h$ *непрекидно диференцијабилна на* $[0, T]$ *и за свако* $t \in [0, T]$ *важи* $h'(t) > 0$.

б) *Ако је* $r(0) = 0$, *онда је* $h$ *непрекидно диференцијабилна на* $(0, T]$, $\lim_{t \to 0+} h'(t) = +\infty$ *и за свако* $t \in (0, T]$ *важи* $h'(t) > 0$.

Приметимо да је у сваком случају $h' > 0$, из чега можемо добити физичку интерпретацију да висина воде у резервоару током описаног процеса свакако расте (што је очекивано и интуитивно јасно). Функција $h'$ представља *брзину промене функције висине*. Та брзина у општем случају није константна и интересује нас њена брзина промене тј. понашање функције $h''$, ако $h''$ постоји.

Стога, ако додатно претпоставимо да је функција $r$ диференцијабилна на $[0, H]$, из става 1 диференцирањем једнакости $h'(t) = \dfrac{v_0}{\pi r^2(h(t))}$ добијамо

---

[1] Под изводом функције у крајњим тачкама затвореног интервала у овом чланку подразумевамо одговарајуће једностране изводе.

Став 3.

а) *Ако је* $r(0) \neq 0$, *онда за свако* $t \in [0, T]$ *важи* $h''(t) = -\dfrac{2v_0^2}{\pi^2}\dfrac{r'(h(t))}{r^5(h(t))}$.

б) *Ако је* $r(0) = 0$ *онда за свако* $t \in (0, T]$ *важи* $h''(t) = -\dfrac{2v_0^2}{\pi^2}\dfrac{r'(h(t))}{r^5(h(t))}$.

Даље, подсетимо се да је функција $h$ конвексна на $[0, T]$ ако за свако $t_1, t_2 \in [0, T]$ и свако $\lambda \in [0, 1]$ важи

$$h(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leqslant \lambda h(t_1) + (1-\lambda)h(t_2).$$

Функција $h$ је конкавна на $[0, T]$ ако за свако $t_1, t_2 \in [0, T]$ и свако $\lambda \in [0, 1]$ важи

$$h(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \geqslant \lambda h(t_1) + (1-\lambda)h(t_2).$$

Следећа два става су последица става 3, теореме о знаку извода функције за монотоне функције (видети, на пример, став 6.8.1 у [1]) и теореме о карактеризацији конвексности функције на основу знака другог извода функције (видети, на пример, став 6.8.5 у [1]).

Став 4.

а) *Ако је* $r(0) \neq 0$ *и* $r$ *је растућа на* $[0, T]$, *онда је* $r' \geqslant 0$ *на* $[0, T]$, $h'' \leqslant 0$ *на* $[0, T]$ *и функција* $h$ *је конкавна на* $[0, T]$.

б) *Ако је* $r(0) = 0$ *и* $r$ *је растућа на* $[0, T]$, *онда је* $r' \geqslant 0$ *на* $[0, T]$, $h'' \leqslant 0$ *на* $(0, T]$ *и функција* $h$ *је конкавна на* $[0, T]$.

Став 5.

а) *Ако је* $r(0) \neq 0$ *и* $r$ *је опадајућа на* $[0, T]$, *онда је* $r' \leqslant 0$ *на* $[0, T]$, $h'' \geqslant 0$ *на* $[0, T]$ *и функција* $h$ *је конвексна на* $[0, T]$.

б) *Ако је* $r(0) = 0$ *и* $r$ *је опадајућа на* $[0, T]$, *онда је* $r' \leqslant 0$ *на* $[0, T]$, $h'' \geqslant 0$ *на* $(0, T]$ *и функција* $h$ *је конвексна на* $[0, T]$.

Подсетимо се и да резервоар у задатку из уводног дела овог текста има облик ротационе површи. У том задатку је $H = 3$ (у m) и функција $r : [0, H] \to \mathbb{R}$ дефинисана је са

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x, & x \in \Big[0, \dfrac{H}{2}\Big], \\ \dfrac{H}{6}, & x \in \Big[\dfrac{H}{2}, H\Big]. \end{cases}$$

Приметимо да је $r(0) = 0$, па на основу става 2 следи да је функција $h$ непрекидно диференцијабилна на $(0, T]$, $\lim\limits_{t \to 0+} h'(t) = +\infty$ и за свако $t \in (0, T]$ важи $h'(t) > 0$.

Како у овом случају функција $r$ није диференцијабилна на $[0, H]$, не можемо применити став 3 и његове последице, став 4 и став 5. Но, како функција $r$ није диференцијабилна једино у тачки $x_0 = \dfrac{H}{2}$ и како постоје леви извод функције $r$ у тој тачки $r'_-\Big(\dfrac{H}{2}\Big) = \dfrac{1}{3}$ и десни извод функције $r$ у тој тачки $r'_+\Big(\dfrac{H}{2}\Big) = 0$, имамо да су одговарајуће рестрикције функције $r$ диференцијабилне на $\left[0,\dfrac{H}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{H}{2},H\right]$. Отуда, како је функција $r$ растућа на $\left[0,\dfrac{H}{2}\right]$, применом става 4 добијамо да је функција $h$ конкавна на интервалу $\left[0,\dfrac{T}{4}\right]$. Даље, како је рестрикција функције $r$ на $\left[\dfrac{H}{2},H\right]$ константна, на основу става 1 добијамо да је функција $h$ линеарна на $\left[\dfrac{T}{4},T\right]$. Стога, како је $h$ непрекидна функција, добијамо да је функција $h$ конкавна на интервалу $[0,T]$.

Заинтересованим читаоцима остављамо да размотре изложено у случају још неких конкретних функција $r$. На пример, предлажемо да читаоци испишу како изгледа конкретизација добијених резултата у случају да је функција $r:[0,H]\to[0,+\infty)$ дефинисана са $r(x)=1$, или са $r(x)=x$, или са $r(x)=\sqrt{x}$, или са $r(x)=x^2$, или са $r(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, или са $r(x)=e^{-x}$ итд.

Приметимо да ако дозволимо да буде $H=+\infty$ и узмемо $r(x)=e^{-x}$, добијамо „бесконачни“ неограничени резервоар чија је запремина коначна и једнака $\dfrac{\pi}{2}$. Тај резервоар би се брзином пуњења $v_0$ напунио за коначно време $T=\dfrac{\pi}{2v_0}$. Иначе, функција висине у овом случају дефинисана је са

$$h(t)=-\frac{1}{2}\ln\Big(1-\frac{2v_0t}{\pi}\Big).$$

На крају овог одељка, скицираћемо још испитивање конвексности функције $h$ без употребе диференцијалног рачуна и одговарајућих теорема истог. У том циљу поделимо интервал $[0,H]$ (скуп вредности функције $h$, тј. висину резервоара) тачкама на $k\geqslant 2$ подинтервала једнаких дужина. Дакле, нека је

$$0=h_0<h_1<\cdots<h_{k-1}<h_k=H,$$

при чему за свако $i\in\{1,\dots,k\}$ важи $h_i-h_{i-1}=\dfrac{H}{k}$. Даље, нека је $t_i$ ($i\in\{1,\dots,k\}$) време потребно да се резервоар напуни до висине $h_i$. Јасно је да важи $h_i=h(t_i)$.

Ако је $r$ растућа функција (тј. ако се резервоар са повећањем своје висине шири) онда из $1\leqslant j<l\leqslant k$ следи

$$t_l-t_{l-1}\geqslant t_j-t_{j-1},$$

тј. време да се напуни део резервоара „између висине $h_{j-1}$ и $h_j$“ мање је од времена да се напуни део резервоара „између висине $h_{l-1}$ и $h_l$“. Дакле,

$$\frac{h(t_j)-h(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}\geqslant\frac{h(t_l)-h(t_{l-1})}{t_l-t_{l-1}}.$$

Отуда можемо закључити да повећањем броја $i$ вредност количника

$$\frac{h(t_i)-h(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$$

опада. Другим речима, средња брзина промене функције висине опада, одакле се може закључити и да брзина промене функције висине опада. Дакле, функција $h$ је конкавна.

Напоменимо да су проблеми слични овоме који смо изложили у овом одељку разматрани у раду [2], као и у књизи [5].

## 4. Уливање воде у посуду која има облик ротационе површи – обратни проблем

Размотримо сада и обратни проблем.

Нека је дата функција $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ која има својства (h1) и (h2) и једно од следећих својства:

(h3a) $h$ је непрекидно диференцијабилна на $[0, T]$ и за свако $t \in [0, T]$ важи $h'(t) > 0$;

(h3b) $h$ је непрекидно диференцијабилна на $(0, T]$, $\lim\limits_{t\to 0+} h'(t) = +\infty$ и за свако $t \in (0, T]$ важи $h'(t) > 0$.

Да ли постоји функција $r : [0, h(T)] \to \mathbb{R}$ са својствима (r1) и (r2) таква да је функција $h$ функција висине која одговара резервоару $\sigma_r$ у који се улива вода брзином $v_0$?

Претпоставимо да таква функција постоји. Тада за свако $t \in [0, T]$ важи

$$v_0 t = \pi \int_0^{h(t)} r^2(\xi)\, d\xi.$$

Диференцирањем последње једнакости добијамо да за свако $t \in [0, T]$ важи

$$v_0 = \pi r^2(h(t)) h'(t),$$

па је функција $r$ (ако постоји) дефинисана са

$$r(x) = \sqrt{\frac{v_0}{\pi h'(h^{-1}(x))}}. \tag{7}$$

Стога, ако је дата функција $h$ са својствима (h1), (h2) и (h3a) или (h3b), онда функција $r : [0, h(T)] \to [0, +\infty)$ дефинисана једнакошћу (7) има својства (r1) и (r2). Дакле, одговор на постављено питање је позитиван, тј. обратни проблем има решење.

Интересантно је размотрити којим изразом је дефинисана функција $r$ у случају неких конкретних функција. На пример, ако је $h : [0, T] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $h(t) = \sqrt{t}$, онда је функција $r : \left[0, \sqrt{T}\right] \to [0, +\infty)$ дефинисана је са $r(x) = \sqrt{\dfrac{2v_0}{\pi}}\sqrt{x}$.

Посебно је интересантно размотрити којим изразом је дефинисана функција $r$ ако је функција $h$ нека конвексна функција.

Нека је функција $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ дефинисана са $h(t) = t^2$. Приметимо да овако дефинисана функција $h$ не задовољава нити услов (h3a), нити услов (h3b).

Међутим, ако бисмо за овако дефинисану функцију $h$ применили формулу (7), добили бисмо

$$r(x) = \sqrt{\frac{v_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}},$$

тј. одговарајући резервоар би имао дно бесконачне површине. С друге стране, запремина тог резервоара једнака је

$$\pi\int_0^{T^2}\left(\sqrt{\frac{v_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}\right)^2 dx = v_0T.$$

Погодан пример конвексне функције $h$ јесте функција дефинисана са

$$h(t) = e^t - 1.$$

У том случају функција $r$ дефинисана је са $r(x) = \sqrt{\dfrac{v_0}{\pi(x+1)}}$.

Напоменимо да је уопштење обратног проблема детаљно обрађено у раду [3]. Наиме, у том раду показано је да ако функција $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ има својства (h1) и (h2), а уместо једног од својстава (h3a) или (h3b), има својство

(ch3a) $h$ је конвексна на $[0,T]$, $h'_+(0) > 0$ и $h'_-(T) < +\infty$,

онда постоји одговарајући уопштени резервоар за који је функција висине управо функција $h$.

Захвалница. Аутори се захваљују Сањи Бошковић за помоћ у изради илустрација.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, 11. изд, „Круг“, Београд, 2014.

[2] P. Eisenmann, *A contribution to the development of functional thinking of pupils and students*, The Teaching of Mathematics, XII, 2 (2009), 73–81.

[3] M. Mateljević, M. Svetlik, *A contribution to the development of functional thinking related to convexity*, The Teaching of Mathematics, XIII, 1 (2010), 1–16.

[4] M. Mateljević, A. Rosić, M. Svetlik, *A problem from the PISA assessment relevant to calculus*, The Teaching of Mathematics, XIV, 1 (2011), 15–29.

[5] G. Polya, *How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945.

[6] `https://www.oecd.org/pisa/38709418.pdf`

Математички факултет, Београд, Студентски трг 16

*E-mail*: `miodrag@matf.bg.ac.rs, marek.svetlik@matf.bg.ac.rs`