Др Милан Живановић

КРИТЕРИЈУМИ ДЕЉИВОСТИ

Критеријуми дељивости представљају правила којима се утврђује да ли је природан број n дељив природним бројем m. Већина ученика може самостално доћи до закључка да је број дељив са 2 ако је цифра јединица парна, а са 5 ако је цифра јединица 0 или 5. У шестом разреду основне школе формулишу се и критеријуми дељивости са 3 и 9, као и са 4 и 8. Касније се презентује и услов дељивости са 11. На основу тога се закључује и о условима под којима је произвољан природан број дељив и неким сложеним бројем. Овде ћемо, полазећи од једног општијег става, доказати исправност поменутих критеријума и извести неке ређе коришћене.

Паскалов критеријум дељивости. *Нека је $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ декадни запис природног броја n, r_i остатак при дељењу 10^i природним бројем m, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Тада је n дељив са m ако и само ако је са m дељив број $p_m(n) = a_k r_k + a_{k-1} r_{k-1} + \cdots + a_1 r_1 + a_0$.*

Из чињенице да је $10^i \equiv r_i \pmod m$ за свако i из датог скупа индекса, добијамо низ конгруенција $10^i \cdot a_i \equiv a_i r_i \pmod m$. Сабирањем ових конгруенција имамо да је $n \equiv p_m(n) \pmod m$, чиме је Паскалов критеријум доказан.

Покажимо прво да су стандардни критеријуми које смо научили у основној школи последице доказаног критеријума. Нека је m једнако 2 или 5. Тада је 10^i једнак 0 за сваки природни изложилац i, те је $p_2(n) = p_5(n) = a_0$, тј. природан број је дељив са 2 (односно 5) ако и само ако је са 2 (односно 5) дељива његова цифра јединица. У случају да је m једнако 3 или 9, остаци дељења декадних јединица овим бројевима су једнаки 1, па је $n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \pmod m$. Из овога следе познати критеријуми за дељивост природног броја са 3 (односно 9): *број је дељив са 3 (односно 9) ако и само ако му је збир цифара дељив са 3 (односно 9).* За број 11 одговарајући остаци су $r_i = \begin{cases} 1, & i = 2\ell, \\ -1, & i = 2\ell - 1 \end{cases}$, $\ell \in \mathbb{N}$, па је $p_{11}(n) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^k a_k$. Закључујемо да је *број дељив са 11 ако и само ако је разлика збира цифара на парним и збира цифара на непарним местима дељива са 11.* На основу написаног читаоцу се препушта да на сличан начин утврди услове дељивости природног броја са 4 и 8.

Напомињемо да је код одређивања остатака при дељењу декадних јединица неким бројем често погодно користити негативне остатке који су по апсолутној вредности мањи од одговарајућих позитивних остатака. На пример, може се користити да је $4 \equiv -3 \pmod 7$. Ово ћемо искористити за налажење критеријума за дељвост бројем 7. У табели 1 дати су остаци при дељењу декадних јединица 10^i са 7, $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_i	1	3	2	-1	-3	-2	1	3	2	-1	-3	-2

Табела 1. Остаци при дељењу декадних јединица са 7

На основу табеле и Паскаловог критеријума добијамо да је

$$n \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + \cdots \pmod 7$$

(број сабирака на десној страни једнак је броју цифара броја n.

На пример, за број 54 838 добијамо да је $p_7(54\,838) = 8 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 8 - 1 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 14$ дељиво са 7, па је са 7 дељив и тај број. За број 8 517 број $p_7(8517) = 7 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 1 \cdot 8 = 12$ није дељив са 7, па ни 8 517 није дељив са 7.

У низу остатака при дељењу декадних јединица са 7 уочавамо периодичност, тако да цифре броја чију дељивост испитујемо можемо груписати у блокове по три цифре, почев од цифре јединица. За бројеве којима број цифара није дељив са 3 дописујемо испред броја једну или две нуле, тако да у сваком блоку буду по три цифре. На пример, број 15 783 посматрамо као 015 783, а као блокове издвајамо 783 и 015 (783 и 15). Тада прву тројку сабирака у броју $p_7(n)$ можемо написати у облику $a_0 + 10a_1 + 100a_2 - 7a_1 - 98a_2 = \overline{a_2a_1a_0} - 7b$, $b \in \mathbb{N}$. На исти начин можемо написати и наредне тројке сабирака, па закључујемо да важи

$$p_7(n) = \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \cdots - 7c, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Одавде следи да је $p_7(n)$, а самим тим и n, дељиво са 7 ако и само ако је број $\overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \cdots$ дељив са 7. Речима: *број је дељив са* 7 *ако и само ако је алтернирајућа сума троцифрених блокова тог броја, почев од цифре јединица, дељива са* 7.

На пример, за број 36 573 852 по овом критеријуму добијамо $852 - 573 + 36 = 315$. Сада директним израчунавањем $315 : 7 = 45$ утврђујемо да је 315 дељиво са 7, па је и дати број дељив са 7. Другачије, могли смо за 315 израчунати $p_7(315) = 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14$, што је такође дељиво са 7.

Слични критеријуми се могу извести и за дељивост природног броја са 11 или 13. У доказима се на аналоган начин користе Паскалов критеријум и табеле 2, односно 3. Поступак и закључке препуштамо читаоцу.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_i	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Табела 2. Остаци при дељењу декадних јединица са 11

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_i	1	-3	9	-1	3	-9	1	-3	9	-1	3	-9

Табела 3. Остаци при дељењу декадних јединица са 13

За дељивост са 11 можемо добити још један критеријум. Наиме,

$$p_{11}(n) = a_0 + 10a_1 - 11a_1 + a_2 + 10a_3 - 11a_3 + \cdots = \overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \cdots - 11b,$$

$b \in \mathbb{N}$, па закључујемо да је $p_{11}(n)$, а с њим и n, дељив са 11 ако и само ако је са 11 дељив број $\overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \cdots$. Односно, *природан број је дељив са 11 ако и само ако је са 11 дељив збир двоцифрених блокова тог броја, почев од цифре јединица.* На пример, за број 15 114 имамо да је $14 + 51 + 1 = 66$ дељиво са 11, па је и број 15 114 дељив са 11.

У пракси се за извођење критеријума дељивости често користи алгебарска комбинација последње цифре и броја који из датог броја настаје одстрањивањем те цифре јединица. Код вишецифрених бројева тај се поступак понавља више пута док се не дође до броја који је лак за испитивање дељивости. Због тога овакве критеријуме дељивости називамо *рекурзивним.*

За број 7 рекурзивни критеријум гласи: *број је дељив са* 7 *ако и само ако је разлика тог броја без последње цифре и двоструке вредности те цифре дељива са* 7. Односно, $10a + b \equiv 0 \pmod 7$ ако и само ако је $a - 2b \equiv 0 \pmod 7$.

Применимо овај критеријум на већ провереном примеру броја 315. Имаћемо да је $31 - 2 \cdot 5 = 21$ дељиво са 7, па је и 315 дељиво са 7. За број 36 617 имамо $3661 - 14 = 3647$, а затим је $364 - 14 = 350$ дељиво са 7, па то важи и за полазни број. За број 678 имамо $67 - 16 = 51$, па број није дељив са 7.

Докажимо и овај критеријум. Нека је $n = 10a + b$. Тада из $a - 2b \equiv 0 \pmod 7$, односно $\dfrac{n-b}{10} - 2b \equiv 0 \pmod 7$, добијамо $\dfrac{n-21b}{10} \equiv 0 \pmod 7$. Како 10 није дељиво са 7 а 21 јесте, закључујемо да је n дељиво са 7. Важи и обрат јер је конгруенција релација еквиваленције.

У класи рекурзивних критеријума је и следећи за број 17. *Природан број је дељив са* 17 *ако и само ако је разлика тог броја без последње цифре и петоструке вредности те цифре дељива са* 17. Проверимо ово правило на примеру броја 12 529. Имаћемо $1252 - 45 = 1207$, затим $120 - 35 = 85$ и, најзад, $8 - 25 = -17$. Дакле, број 12 529 је дељив са 17. Заиста, $12\,529 : 17 = 737$.

Критеријум тврди да је $n = 10a+b$ дељив са 17 ако и само ако важи $a - 5b \equiv 0 \pmod{17}$. Заиста, на основу низа еквивалентних конгруенција почев од $a - 5b \equiv 0 \pmod{17}$, преко $\dfrac{n-b}{10} - 5b \equiv 0 \pmod{17}$, долазимо до $\dfrac{n-51b}{10} \equiv 0 \pmod{17}$, одакле се закључује да је и n дељиво са 17.

Без доказа и провере наводимо још неколико критеријума овог типа.

Природан број је дељив са 19 *ако и само ако је збир тог броја без последње цифре и двоструке цифре јединица дељив са* 19.

Природан број је дељив са 23 *ако и само ако је збир тог броја без последње цифре и седмоструке цифре јединица дељив са* 23.

Природан број је дељив са 29 *ако и само ако је збир тог броја без последње цифре и троструке цифре јединица дељив са* 29.

Задаци

1. Одредити све просте троцифрене бројеве са различитим цифрама код којих је цифра јединица једнака збиру остале две цифре.

Решење. Цифра јединица не сме бити парна јер иначе тај број не би био прост. Исто важи и за цифру 5, јер јер би иначе број био дељив са 5. Ако би последња цифра била 3 или 9, збир цифара тог броја би такође био дељив са 3 или 9, па он опет не би био прост. Број 1 искључујемо као цифру јединица јер не може бити једнак збиру друге две цифре. Закључујемо да је цифра јединица траженог броја једнака 7. Услов збира цифара задовољавају бројеви 167, 617, 257, 527, 347 и 437, од којих су прости: 167, 617, 257 и 347.

2. Природан број n је 3 пута већи од збира својих цифара. Доказати да је n дељив са 27.

Решење. Прво закључујемо да је n дељив са 3. Тада је и његов збир цифара дељив са 3. Како је n три пута већи од тог збира, следи да је онда n дељиво са 9. Но, тада је и збир цифара броја n дељив са 9, те је сам број n дељив са 27.

3. Запис природног броја садржи једну јединицу, две двојке, три тројке, итд, девет деветки. Може ли тај број бити потпун квадрат?

Решење. Збир цифара овог броја је 285, па је он дељив са 3, али није са 9. Број са оваквим записом не може бити потпун квадрат.

4. Одредити четвороцифрен број $\overline{xxyy}$ тако да буде квадрат природног броја.

Решење. Број $\overline{xxyy}$ је дељив са 11, па са 11 мора бити дељив и број чији је он квадрат. Притом, тај број мора бити двоцифрен. Директном провером добијамо да овај услов задовољава само број 88. Тражени број је 7744.

5. Одредити троцифрене бројеве који су 12 пута већи од збира својих цифара.

Решење. Као у задатку 2. закључујемо да такав број мора бити дељив са 27. По услову задатка он мора бити дељив и са 4, па је дељив са 108. Провером се добија да од свих бројева 108, 216, 324, ... , 972 само 108 задовољава услове задатка.

6. Доказати да је број 192021 ... 7980 дељив са 1980.

Решење. Дати број се завршава са 80, па је дељив са 20. Остаје да се докаже да је дељив са 9 и са 11. За дељивост са 11 искористимо критеријум по којем сума блокова од по два узастопна броја треба да буде дељива са 11. У овом случају ти блокови чине аритметички низ са првим чланом 19 и последњим 80, у којем, дакле, има 62 члана. Тај збир је једнак $\frac{62}{2}(19+80) = 31 \cdot 99$, па је дељив са 11. Уједно, из овог резултата добијамо и да је број дељив са 9. Дакле, дати број јесте дељив са $9 \cdot 11 \cdot 20 = 1980$.

7. Одредити најмањи природан број у коме се свака декадна цифра појављује тачно једном и који је дељив са 990.

Решење. Број 990 је производ бројева 2, 5, 9 и 11. Сваки десетоцифрени број састављен од разичитих цифара узетих тачно по једанпут, дељив је са 9 јер је збир тих цифара једнак 45. По критеријуму дељивости са 10, жељени број мора да се завршава са 0. Остаје да се искористи дељивост са 11. Дакле, разлика између збира цифара траженог броја на непарним местима и збира његових цифара на парним местима мора бити непаран број из интервала од -15 до 25, дељив са 11. То могу бити само -11 и 11. Нека је S збир цифара на непарним местима, гледано с лева на десно. Тада S може бити 17 или 28. Лако је видети да постоје само две могућности за $S = 17$, при чему је мањи од њих једнак 1526384970.

За $S = 28$ исписаћемо по реду минималне могуће цифре с лева на десно, колико год је то могуће, под условом да збир цифара на непарним местима на крају буде 28 (самим тим ће збир цифара на парним местима бити једнак 17). Ако су прве четири цифре 1234, онда збир преостале три цифре на петом, седмом и деветом месту треба да буде 24, што је могуће само ако су оне једнаке 7, 8 и 9, од којих се добија број 1234758690 који задовољава услове задатка. То је и тражено решење, јер је мање од напред конструисаног броја 1526384970.

8. Природни бројеви од 1 до 100 написани су редом у низу, без размака. Затим је између неких бројева стављен знак плус (на пример, $1234567+891011\ldots15 + 1617\ldots99100$). Може ли резултујући збир бити дељив са 111?

Решење. Остатак датог броја при дељењу са 3 једнак је остатку збира његових цифара при дељењу са 3. То значи да је збир остатака при дељењу са 3 свих бројева одвојених знацима плус једнак остатку при дељењу са 3 збира свих цифара бројева од 1 до 100. Овај збир цифара даје, када се подели са 3, исти остатак као збир $1+2+\cdots+100 = 5050$. Како 5050 није дељив са 3, ни збир из услова задатка није дељив са 3, па није дељив ни са $111 = 3 \cdot 37$.

9. Дат је скуп свих стоцифрених бројева написаних само помоћу цифара 1 и 2. Колико међу њима има бројева дељивих са 3?

Решење. Означимо са A_n скуп n-тоцифрених бројева у чијем запису се појављују само цифре 1 и 2, а са B_n подскуп скупа A_n чији чланови су бројеви дељиви са 3. Број елемената скупа A_n је 2^n; означимо са x_n број елемената скупа B_n (треба да одердимо вредност x_{100}). Приметимо да се сваки елемент скупа A_n може добити тако да се неком елементу a скупа A_{n-2} допишу с десне стране неке две цифре. Притом, да би се на тај начин добио елемент скупа B_n, постоје три могућности:

- ако је a дељиво са 3, треба дописати 12 или 21;
- ако a при дељењу са 3 даје остатак 1, треба дописати 11;

– ако a при дељењу са 3 даје остатак 2, треба дописати 22.

Дакле, сваки елемент скупа B_{n-2} генерише на овај начин два елемента скупа B_n, а сваки елемент скупа $A_{n-2} \setminus B_{n-2}$ генерише један елемент скупа B_n. Зато важи следећа једнакост:

$$x_n = 2x_{n-2} + (2^{n-2} - x_{n-2}) = x_{n-2} + 2^{n-2}.$$

Стављајући $n \in \{4, 6, \ldots, 98, 100\}$ у претходну једнакост (и користећи да је $x_2 = 2$), добијамо следеће једнакости

$$x_2 = 2, \quad x_4 = x_2 + 2^2, \quad x_6 = x_4 + 2^4, \quad \ldots, \quad x_{98} = x_{96} + 2^{96}, \quad x_{100} = x_{98} + 2^{98}.$$

Одавде је

$$\begin{aligned} x_{100} &= 2^{98} + 2^{96} + \cdots + 2^4 + 2^2 + 2 = 4^{49} + 4^{48} + \cdots + 4^2 + 4 + 2 \\ &= 2 + \frac{4^{50} - 4}{4 - 1} = 2 + \frac{4^{50} - 4}{3} = \frac{2 + 4^{50}}{3}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов, *Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ*, МЦНМО, Москва, 2002.

[2] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, 6. издање, Друштво математичара Србије, Београд, 2021.

[3] Н. Л. Семедяева, М. В. Федотов, *Олимпиядная математика. Задачи на целые числа с решениями и указаниями*, Лаборатория знаний, Москва, 2020.

Академија васпитачко-медицинских струковних студија, Крушевац

E-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs