Др Јелена Катић

МЕТОД ПРВИХ ИНТЕГРАЛА ЗА РЕШАВАЊЕ ПАРЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Описаћемо метод решавања квазилинеарних парцијалних диференцијалних једначина помоћу првих интеграла. Дајемо доказ који се ослања на Теорему о рангу, као и неколико примера.

1. Карактеристике придружене квазилинеарној парцијалној једначини

Посматрајмо нехомогену *квазилинеарну једначину*:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \tag{1}$$

где су a, b и c непрекидне функције трију променљивих, а $u = u(x,y)$ непозната функција.

Означимо са

$$\mathcal{S} := \{(x,y,u(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

график решења u. Циљ нам је, наравно, да одредимо функцију u, али свака информација о њеном графику $\mathcal{S}$ је корисна.

Нормала на површ $\mathcal{S}$ у тачки $(x,y,u(x,y))$ дата је са

$$\boldsymbol{n} = (u_x(x,y), u_y(x,y), -1).$$

Али, како је u решење једначине (1), то је

$$\langle (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)), \boldsymbol{n}\rangle = 0 \text{ па је } (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)) \perp \boldsymbol{n}.$$

Зато је природно да очекујемо да крива

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), u(t)) \in \mathbb{R}^3$$

која задовољава једначине

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(x,y,u) \\ y'(t) &= b(x,y,u) \\ u'(t) &= c(x,y,u) \end{aligned} \tag{2}$$

лежи на површи $\mathcal{S}$. Приметимо пре свега да је (2) систем *обичних* диференцијалних једначина.

Дефиниција 1. Једначине (2) се зову *карактеристистичне једначине* или *систем карактеристика* за линеарну парцијалну једначину (1). Векторско поље $F(x, y, u(x, y)) := (a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$ се зове *поље карактеристика*. Сама крива, тј. решење система (2) се зове *карактеристика*.

Докажимо да је $\mathcal{S}$ заиста састављена од карактеристика.

Теорема 1. *Нека је $\gamma(t)$ карактеристика кроз тачку A (тј. решење система* (2) *са почетним условом $\gamma(0) = A$) и нека је тачка A на површи $\mathcal{S}$. Тада је цела карактеристика γ на $\mathcal{S}$. Одавде следи да је површ $\mathcal{S}$ унија карактеристика.*

Доказ. Нека је $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Дефинишимо криву

$$\alpha(t) := (x(t), y(t), u(x(t), y(t))).$$

Крива α припада површи $\mathcal{S}$ због своје дефиниције. Она је график функције u рестриковане на криву $\pi \circ \gamma$, где је π пројекција на раван Oxy. Како пројекција тачке A на раван Oxy има координате $(x(0), y(0))$ и како $A \in \mathcal{S}$, то је $\alpha(0) = A$. Међутим,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\alpha(t) &= (x'(t), y'(t), u_x x'(t) + u_y y'(t)) \\ &= (a(x, y, u), b(x, y, u), u_x a(x, y, u) + u_y b(x, y, u)) \\ &= (a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u)),\end{aligned}$$

и

$$\alpha(0) = A = \gamma(0),$$

односно пресликавања γ и α задовољавају исти Кошијев проблем, па, по Пикаровој теореми о егзистенцији и јединствености решења, она морају бити једнака. Како α лежи на $\mathcal{S}$, то и γ лежи на $\mathcal{S}$. ∎

Напомена 1. Горња дискусија и дефиниција важе и за општију једначину по функцији u од n промењљивих:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \ldots, x_n, u) u_{x_j} = c(x_1, \ldots, x_n, u).$$

Систем карактеристика је овде

$$x_j'(t) = a_j(x_1, \ldots, x_n, u), \quad u'(t) = c(x_1, \ldots, x_n, u).$$

за линеарну парцијалну једначину (1).

Видели смо да се тражена хиперповрш која је график функције $u(x_1, \ldots, x_n)$ у $\mathbb{R}^{n+1}$ може добити као унија карактеристика. Без икаквог почетног услова ми ову унију можемо добити на много начина. Један од начина за одређивање конкретне уније (конкретног графика, тј. конкретне функције u) је метод првих интеграла.

2. Хомогена линеарна једначина

Ако функције a, b и c у (1) зависе само од (x, y):

$$a = a(x, y), \quad b = b(x, y) \quad c = c(x, y),$$

тада се једначина (1) зове *линеарна* парцијална једначина првог реда. Ако је $c(x, y) = 0$, тада се она зове *хомогена*.

Пример 1. Посматрајмо једначину транспорта:

$$u_\tau + a u_x = 0,$$

$u = u(\tau, x)$. Овде је $a(\tau, x) = 1$, $b(\tau, x) = a$, $c(\tau, x) = 0$. Ако њој придружимо одговарајући систем карактеристика, добијамо:

$$\begin{aligned} \tau'(t) &= 1 & & \tau(t) = t + t_0 \\ x'(t) &= a & \text{односно} \quad & x(t) = at + x_0 \\ u'(t) &= 0 & & u(t) = u_0. \end{aligned}$$

Како карактеристика $\gamma(t) = (\tau(t), x(t), u(t))$ лежи на графику $\mathcal{S}$ функције $u(\tau, x)$, то у овом примеру имамо да права

$$\begin{aligned} \tau(t) &= t + t_0 \\ x(t) &= at + x_0 \\ u(t) &= u_0. \end{aligned}$$

припада $\mathcal{S}$. То значи да је u константно, кадгод је $\tau(t) = t + t_0$ и $x(t) = at + x_0$, односно кадгод је $x - a\tau$ константно. Зато тражимо решење у облику:

$$u(\tau, x) = g(x - a\tau),$$

за произвољну диференцијабилну функцију g. Провером добијамо да је овакво u заиста решење једначине $u_\tau + a u_x = 0$:

$$u_\tau + a u_x = g'(x - a\tau)(-a) + a g'(x - a\tau) \cdot 1 = 0. \quad \triangle$$

Пример 2. Систем карактеристика придружен парцијалној једначини

$$y u_x - x u_y = 0$$

јесте

$$\begin{aligned} x' &= y & & x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y' &= -x & \text{односно} \quad & y(t) = y_0 \cos t - x_0 \sin t \\ u' &= 0 & & u(t) = u_0. \end{aligned}$$

Видимо да су карактеристике кругови $x^2 + y^2 = \text{const}$ у равни $u = u_0$, односно да је $\mathcal{S}$ ротациона површ, тј. да је u зависи само од $x^2 + y^2$, $u = g(x^2 + y^2)$, за произвољну диференцијабилну функцију g. Можемо и проверити да је ово тачно:

$$y u_x - x u_y = y g'(x^2 + y^2) \cdot 2x - x g'(x^2 + y^2) \cdot 2y = 0. \quad \triangle$$

Шта смо у радили у претходна два примера, која су оба били примери *хомогених линеарних* једначина

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \ ?$$

Пронашли смо једначину карактеристике, и на неки начин изразили x и y, тако да добијемо функцију која је константна дуж карактеристике (у примеру 1 то је био израз $x - a\tau$, а у примеру 2 израз $x^2 + y^2$). Затим смо тражили решење у облику функције тог израза (у примеру 1 $g(x - a\tau)$, а у примеру 2 $g(x^2 + y^2)$). Формализујмо сада овај поступак.

Посматрајмо *хомогену линеарну* једначину

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \dots, x_n)u_{x_j} = 0 \tag{3}$$

и њој придужене карактеристике

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n(x_1, \dots, x_n) \\ u'(t) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

У случају хомогеног система, где се u не мења дуж карактеристике, уместо горње криве посматраћемо *пројектовану карактеристику* (тј. њену пројекцију на раван $u = 0$), која представља решење система

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{5}$$

Дефиниција 2. Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ се зове *први интеграл* система (5) ако је f константна дуж сваког решења тог система.

Пример 3. Кажемо да је векторско поље $\boldsymbol{F}$ *конзервативно* или *потенцијално* ако постоји функција U таква да је

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\nabla U(\boldsymbol{x}).$$

Функција U се зове *потенцијал векторског поља* $\boldsymbol{F}$.

Ако је векторско поље које задаје једначину кретања

$$\boldsymbol{r}'' = \frac{1}{m}\boldsymbol{F} \tag{6}$$

конзервативно, тада важи Закон одржања енергије који каже да се тотална енергија система

$$E(\boldsymbol{r}) = K(\boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r})$$

не мења дуж трајекторија $\boldsymbol{r}(t)$. У горњој формули је

$$K(\boldsymbol{r}(t)) = m\frac{\|\boldsymbol{r}'(t)\|^2}{2}$$

кинетичка енергија, а U је потенцијална енергија, потенцијал силе $\boldsymbol{F}$, која зависи само од положаја $\boldsymbol{r}$, а не и од брзине $\boldsymbol{r}'$. Да бисмо доказали Закон очувања енергије, довољно је да проверимо да је

$$\frac{d}{dt}E(\boldsymbol{r}(t)) = 0,$$

где је $\boldsymbol{r}(t)$ решење једначине (6). Како је

$$\frac{d}{dt}K(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}'(t)\rangle = m\langle \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)\rangle$$

и

$$\frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}(t)) = \langle \nabla U(\boldsymbol{r}(t)), \boldsymbol{r}'(t)\rangle = -\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)), \boldsymbol{r}'(t)\rangle = -m\langle \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'(t)\rangle,$$

то је

$$\frac{d}{dt}E(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{d}{dt}K(\boldsymbol{r}(t)) + \frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}(t)) = 0.$$

Систем (6) једначина другог реда у $\mathbb{R}^n$ еквивалентан је систему:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}' &= \frac{1}{m}\boldsymbol{F}, \end{aligned}$$

једначина првог реда у $\mathbb{R}^{2n}$. Из Закона о одржању енергије закључујемо да је укупна енергија први интеграл система ако је систем конзервативан. $\triangle$

Задатак 1. Доказати да је Хамилтонова функција H први интеграл Хамилтоновог система:

$$\begin{cases} \dot{x_j} = \dfrac{\partial H}{\partial y_j} \\ \dot{y_j} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases}$$

у $\mathbb{R}^{2n}$.

У доказу теореме 3 (која нам даје решење хомогене линеарне једначине) користићемо Теорему о рангу коју наводимо без доказа.

Теорема 2. **(Теорема о рангу)** *Нека је $\mathcal{U}$ отворена околина тачке $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ глатко пресликавање такво да је ранг линеарног пресликавања $dF(\boldsymbol{x})$ константан на $\mathcal{U}$:*

$$\operatorname{rang}(dF(\boldsymbol{x})) = r, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{U}.$$

Тада постоје отворене околине $\mathcal{U}_0 \ni \boldsymbol{x}_0$ *и* $\mathcal{V}_0 \ni \boldsymbol{y}_0$ *тачака* $\boldsymbol{x}_0$ *и* $\boldsymbol{y}_0 = F(\boldsymbol{x}_0)$ *и дифеоморфизми:*

$$\psi : \mathcal{U}_0 \to B_n := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_i^2 < 1\right\},$$
$$\varphi : \mathcal{V}_0 \to B_m := \left\{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{j=1}^{m} y_i^2 < 1\right\}$$

такви да важи

$$\varphi \circ F \circ \psi^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad \blacksquare$$

Доказ Теореме о рангу се може наћи у [2].

Дефиниција 3. Кажемо да су функције $f_1, \dots, f_k$ линеарно независне у тачки $\boldsymbol{x}_0$ ако су вектори $\nabla f_1(\boldsymbol{x}_0), \dots, \nabla f_k(\boldsymbol{x}_0)$ линеарно независни.

Теорема 3. *За сваких* $n-1$ *првих интеграла* $f_1, \dots, f_{n-1}$ *система* (5), *и за произвољну диференцијабилну функцију* $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, *функција*

$$u(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_n))$$

је решење једначине (3). *Ако су* $f_1, \dots, f_{n-1}$ *линеарно независни први интеграли (на неком скупу* $\mathcal{U}$*) тада су сва решења једначине* (3) *локално овог облика (за свако* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$ *постоји околина* $\mathcal{U}_{\boldsymbol{x}}$ *на којој је решење овог облика).*

Доказ. Прво ћемо доказати да, за произвољну глатку функцију g, и прве интеграле f_j, $g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_n))$ јесте решење једначине (3). Пре свега, имамо:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

Како је f_j константно дуж карактеристике, имамо да је

$$0 = \frac{d}{dt} f_j(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} x_k' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} a_k(x_1, \dots, x_n),$$

када је $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ карактеристика. Зато је

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} g(f_1, \dots, f_{n-1}) = \sum_{k,j} a_k \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\partial g}{\partial y_j} \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

па $g(f_1, \dots, f_{n-1})$ јесте решење.

За доказ другог дела, претпоставимо да је $u(x_1, \dots, x_n)$ једно решење једначине (3).

За $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ означимо

$$\Gamma_{\boldsymbol{c}} := \{f_1 = c_1, \dots, f_{n-1} = c_{n-1}\}.$$

Из линеарне независности првих интеграла и Теореме о имплицитној функцији следи да је скуп $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ глатка крива (или празан скуп). Како је карактеристика (4) садржана у скупу $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ за неко $\boldsymbol{c}$, следи да је $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ (локално) карактеристика кроз тачку $\boldsymbol{c}$. Пошто је u константно дуж карактеристике, следи да је u константно дуж $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ за свако $\boldsymbol{c}$ за које је $\Gamma_{\boldsymbol{c}} \neq \emptyset$.

Како су $\nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-1}$ линеарно независни, пресликавање

$$F = (f_1, \dots, f_{n-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$$

испуњава услове Теореме о рангу, за $r = n-1$. Имамо да је

$$\varphi \circ F \circ \psi^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

тј.

$$\varphi \circ F \circ \psi^{-1} = \pi, \tag{7}$$

где је

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad \pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$$

пројекција.

За фиксирано $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in B_{n-1}$ (B_{n-1} је кодомен пресликавања φ из Теореме о рангу), вредност израза $F(\psi^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n))$ је константна, пошто не зависи од x_n. То значи да је F константно дуж криве

$$\beta : t \mapsto \psi^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}, t),$$

односно да је крива β скуп облика $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$ за неко $\boldsymbol{c}$.[1] Како је и u констанстно дуж $\Gamma_{\boldsymbol{c}}$, закључујемо да је

$$u(\psi^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)) = \text{const},$$

па је

$$u(\psi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

тј.

$$u \circ \psi^{-1} = f \circ \pi. \tag{8}$$

Како су u и ψ^{-1} глатки, то је и f глатко.

Из (8) и (7) имамо

$$u \circ \psi^{-1} = f \circ \pi = f \circ \varphi \circ F \circ \psi^{-1},$$

па је $u = f \circ \varphi \circ F$. Изаберимо да је $g = f \circ \varphi$. ∎

[1] Прецизније, $\boldsymbol{c} = \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$.

3. Нехомогена квазилинеарна једначина

Општи случај квазилинеарне једначине се лако своди на хомогени линеарни. Посматрајмо једначину

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1,\dots,x_n,u)u_{x_j} = c(x_1,\dots,x_n,u) \tag{9}$$

и њој придружену карактеристику

$$x_j'(t) = a_j(x_1,\dots,x_n,u), \quad u'(t) = c(x_1,\dots,x_n,u). \tag{10}$$

Теорема 4. *Нека су $f_1,\dots,f_n$ први интеграли система* (10) *и нека је $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ произвољна диференцијабилна функција таква да је*

$$\frac{\partial}{\partial u} g(f_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n,u)) \neq 0 \tag{11}$$

на скупу

$$\mathcal{P} := \{(x_1,\dots,x_n,u) \mid g(f_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n,u)) = 0,$$
$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

за неки отворен скуп $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$. Тада је са

$$g(f_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n,u)) = 0 \tag{12}$$

дефинисано имплицитно решење једначине (9) *на $\mathcal{U}$.*

Приметимо да је услов (11) природан јер нам даје могућност да из једначине (12) изразимо u као функцију по $(x_1,\dots,x_n)$ (барем локално).

Доказ. Нека је $\mathcal{U}$ отворен скуп који садржи $\mathcal{P}$ на ком је такође испуњен услов (11). Одатле добијамо

$$0 \neq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial u} \tag{13}$$

у свакој тачки из скупа $\mathcal{U}$. За свако $(x_1,\dots,x_n)\in\pi(\mathcal{U})$, где је $\pi:(x_1,\dots,x_n,u) \mapsto (x_1,\dots,x_n)$ пројекција, имамо да важи (12), па је

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} g(f_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n,u)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_j}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u}u'_{x_i}\right). \tag{14}$$

Како је f_j први интеграл, слично као у доказу теореме 3 имамо да важи

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i} a_i(x_1,\dots,x_n,u) + \frac{\partial f_j}{\partial u} c(x_1,\dots,x_n,u) = 0,$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} a_i(x_1, \dots, x_n, u) = -\frac{\partial f_j}{\partial u} c(x_1, \dots, x_n, u). \tag{15}$$

Ако једначину (14) помножимо са $a_i(x_1, \dots, x_n, u)$ и просумирамо по i, добијамо:

$$0 = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_j} a_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u} u'_{x_i} \right) = \sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \left(\sum_i a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u} \sum_i a_i u'_{x_i} \right).$$

Уврштавањем (15) у претходну једначину добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \left(-\frac{\partial f_j}{\partial u} c(x_1, \dots, x_n, u) + \frac{\partial f_j}{\partial u} \sum_i a_i(x_1, \dots, x_n, u) u'_{x_i} \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial u} \left(-c(x_1, \dots, x_n, u) + \sum_i a_i(x_1, \dots, x_n, u) u'_{x_i} \right). \end{aligned}$$

Из услова (13) закључујемо да мора бити

$$-c(x_1, \dots, x_n, u) + \sum_i a_i(x_1, \dots, x_n, u) u'_{x_i} = 0,$$

односно да u јесте решење. ■

Теорема 5. *Ако постоји n функционално независних првих интеграла $f_1, \dots, f_n$ система* (10)*, и ако је једначином*

$$f(x_1, \dots, x_n, u) = 0$$

задато имплицитно решење једначине (9)*, тада постоји локално дефинисана*[2] *глатка функција g таква да је*

$$f(x_1, \dots, x_n, u) = g(f_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, u)).$$

Доказ. Пођимо од имплицитне везе између u и $x_1, \dots, x_n$:

$$f(x_1, \dots, x_n, u) = 0$$

и диференцирајмо ову једначину по x_j. Добијамо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u} u_{x_j} = 0 \quad \text{тј.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\partial f}{\partial u} u_{x_j}.$$

Одавде је

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial u} \sum_{j=1}^{n} -u_{x_j} a_j = -c \frac{\partial f}{\partial u}$$

[2] дефинисана у околини тачке $\boldsymbol{y}_0 := (f_1(\boldsymbol{x}_0, u_0), \dots, f_n(\boldsymbol{x}_0, u_0))$

ако је u решење једначине (9). Одавде видимо да је $f = f(x_1, \dots, x_n, u)$ решење *линеарне хомогене* једначине

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} + c\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

а из теореме 3 знамо да су та решења локално облика

$$f(x_1, \dots, x_n, u) = g(f_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, u)). \quad \blacksquare$$

Пример 4. Једначина карактеристике придружене једначини $u_\tau + au_x = u^2$ је

$$\begin{aligned} \tau'(t) &= 1 \\ x'(t) &= a \\ u'(t) &= u^2 \end{aligned} \qquad \text{односно} \qquad \begin{aligned} \tau(t) &= \tau_0 + t \\ x(t) &= at + x_0 \\ u(t) &= \frac{u_0}{1 - tu_0}. \end{aligned}$$

Одавде налазимо два линеарно независна прва интеграла:

$$f_1(\tau, x, u) = a\tau - x, \quad f_2(\tau, x, u) = \frac{1}{u} + \tau,$$

па је решење дато имплицитно са

$$g\Big(a\tau - x, \frac{1}{u} + \tau\Big) = 0$$

за неку глатку функцију g. $\triangle$

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1973.
[2] В. А. Зорич, *Математический анализ*, Наука, Москва, 1981.

Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија
E-mail: jelena.katic@matf.bg.ac.rs