

Др Милан Јовановић, Вељко Ћировић

КОМБИНАТОРИКА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Решавање комбинаторних и логичко-комбинаторних задатака у настави математике значајно утиче на развој стваралачког мишљења, креативности, систематичности и правилног математичког закључивања код ученика на свим нивоима образовања. Теме из комбинаторике се експлицитно скоро не изучавају у редовној настави математике у основним школама, док су у наставним програмима у средњој школи заступљене. У програмима додатне наставе и у основној и у средњој школи комбинаторне теме заузимају значајно место. Настава математике може, бар кроз квалитетан додатни рад, значајно да помогне да се код ученика подстакне развој вештина прављења квалитетних логичких анализа које су неопходне за живот у савременом друштву.

У овом тексту биће представљене неке значајне класе комбинаторних и логичко-комбинаторних проблема, као и неке методе за њихово решавање.

1. Историјски осврт

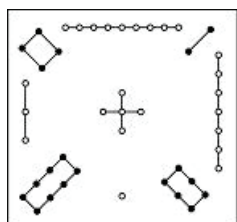
Може се рећи да се комбинаторика, као грана математике, развија од седамнаестог века нове ере. Све до појаве рачунарских машина чинило се да се она не развија у ритму осталих математичких дисциплина. Од тада она добија на значају, а комбинаторне методе данас имају веома озбиљне примене у статистици, теорији случајних процеса, математичком програмирању, информатици и уопште у прављењу планова за разне експерименте.

Ако бисмо желели да се на кратко вратимо на почетак, једноставно је закључити да је све у математици почело бројањем неких објеката, јер је људима постајало важно да нађу начин како да некој групи предмета придруже квантитативна својства. У неким каснијим сегментима развоја, осим бројања било је важно групе објеката и класификовати или на одређени начин комбиновати објекте из различитих група у неке пожељне конфигурације. Управо такви задаци временом су постали предмет комбинаторике.

Издавање на ову тему аутори су одржали на Државном семинару о настави математике и рачунарства, октобра 2025. године у Београду.

Познато је да су међу предметима који су пре више од 3500 година остављени у пирамиди у Египту у којој је сахрањен фараон Тутанкамон, нађени остаци табле с фигурама за стару игру *сeнeт*. Та се игра у то време играла по правилима која ми не можемо прецизно знати, али за нас је корисно сазнање колико далеко историјски сежу подаци о томе када су људи први пут почели користити неке логичке, мисаоне, а самим тим и логичко-комбинаторне игре.

Један од првих фрагмената блиских комбинаторици, а који је забележен у кинеским изворима од пре 4000 година, говори да је њихов цар *Ју* запазио, на брегу поред реке *Лу*, свету корњачу на чијем су оклопу били насликани симболи с белим и црним кружићима за које се тврдило да представљају једноцифрене бројеве (слика лево). Одатле је настала табела бројева на слици десно.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ако се детаљније позабавимо овом бројевном мрежом, запазићемо да је збир бројева у сваком реду, свакој колони или дијагонали једнак 15. Стари Кинези су оваквим квадратима бројева придавали мистична и натприродна својства, тако да се и данас овакве квадратне мреже називају *магичним квадратима*.

Из старогрчке математике, због уништавања чувене александријске библиотеке и књига које би биле значајне за тај период, нема много конкретних података о њиховом бављењу комбинаториком, али неки исечци у виду изолованих података постоје и доприносе закључцима да су и стари Грци у свом бављењу математиком имали одређених комбинаторних идеја које су веома значајне у историјском контексту. Тако се филозоф Ксеникрат из 4. века пре н.е. бавио пребројавањем слогова у речима. Стоик Крисип из 3. века пре н.е. веровао је да се из система од десет аксиома може извести више од милион закључака. Потпуно је непознато како се долазило до резултата ових пребројавања, која су по свему судећи била погрешна. Међутим, неке конкретне комбинаторне проблеме Грци су решавали без грешака. Аристотел је прецизно пребројао све трочлане силогизме, а његов ученик Аристоксен је прецизно избројао различите комбинације дугих и кратких слогова у песмама.

Негде од другог века пре н.е. почиње опадање науке у хеленистичким државама, а са њиме и криза самог друштва. Многи радови из тог времена били су заокупљени углавном мистичким својствима бројева. А после победе хришћанства ова идеја се задржала у примеру повезивања јеретика с бројем 666, који је сматран симболом Антихриста. Међутим, чак и тако бескорисне идеје и студије ипак су давале смернице даљем развоју математике.

У кризним временима комбинаториком су се занимали и астролози, које су занимали распореди и комбинације планета како би на основу знања о томе зак-

ључивали о људским судбинама. Астролог бен Езра је 1140. године пребројао комбинације од по 2, 3, итд. планета од њих 7, што бисмо ми савременим симболима записали као $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$.

Једним од пионира који су радили у области комбинаторике сматра се и јеврејски математичар Леви бен Гершон (14. век).

Ни у старим азијским цивилизацијама није се седело „скрштених руку“. У осмом веку наше ере почео је процват арапске науке. Они су превели на свој језик многа грчка достигнућа и из њих учили, и на основу тога у многим областима надмашили и саме Грке. Посебне резултате Арабљани су постизали у алгебри. Решавајући питања о корену дошли су до формуле за степен збира два броја. Постоје назнаке да су арапски научници знали и за важну особину биномних коефицијената

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}.$$

Упоредо с Арапима, израчунавањем биномних коефицијената бавили су се и кинески математичари, а такође су се „раним радовима“ у области комбинаторике бавили и у Индији. Они су још у 2. веку пре н.е. знали бројеве C_k^n и то да им је сума једнака 2^n . У 12. веку индијски математичар Бхаскара је написао књигу „Сиданта Шиromани“ у чијем је делу „Лилавати“ писао и о проблемима комбинаторике. Писао је о пермутацијама и варијацијама и њиховој вези при рачунању.

Арапска знања су касније продирали у Европу, када су ови освојили Шпанију. Европа је била упозната с арапским достигнућима у алгебри и десетичним системом за рачунање. Знања која су нудили Арапи користио је и Фибоначи. Његова ангажовања за математику у том периоду била су врло значајна. Фибоначијев рекурентни запис којим се следећи члан низа изражава збиром претходна два био је важан замајак у развоју комбинаторике. Нешто касније је *метод рекурентних формула* добио место једног од најмоћнијих апарата за решавање разних комбинаторних проблема.

Морамо напоменути да комбинаторика, а с њом и теорија вероватноће, велику захвалност за своје постојање дугују коцкарским играма на срећу. Наравно, не само њима, већ и радовима великих математичара Паскала и Фермаа, који су, свако на свој начин, учествовали у ударању савремених темеља ових дисциплина. Паскалов троугао се први појављује у том облику у раду „Трактат о аритметичком троуглу“ објављеном, након његов смрти, 1665. године. Можда највећи посао, у том раздобљу, урадио је Лајбниц својим делом „*Dissertatio de Artta Combinatoria*“ из 1666. године. У њему се први пут подробно излаже о принципима комбинаторике и одговарајућим формулама. Лајбниц је истицао да жели да створи општи метод помоћу кога ће све истине до којих се долази размишљањем моћи да се добију и некаквим рачуном. Касније је комбинаторика била занимљива и браћи Бернули и Ојлеру, чијим је радовима и доприносима она само могла постајати све заокруженија и кориснија наука.

Формуле које данас користи, уз целу савремену нотацију, комбинаторика је добила у 19. веку с формализацијом алгебарске симболике.

2. Комбинаторне и логичко-комбинаторне теме у наставним програмима

Задаци наставе математике, наведени у програмима наставе и учења који дефинишу наше образовање су да ученици:

- развијају логичко и апстрактно мишљење;
- развијају способности јасног и прецизног изражавања и коришћења математичко-логичког језика;
- развијају способности одређивања и процене квантитативних величина и њихових односа;
- разликују геометријске објекте и њихове узајамне односе и трансформације;
- разумеју функционалне зависности, њихово представљање и примену;
- развијају систематичност, уредност, прецизност, темељност, истрајност, критичност у раду, креативност;
- развијају радне навике и способности за самостални и групни рад; формирају систем вредности;
- стичу знања и вештине корисне за трансфер у друге предмете и развијају способности за правилно коришћење стручне литературе;
- формирају свест о универзалности и примени математичког начина мишљења;
- буду подстакнути за стручни развој и усавршавање у складу с индивидуалним способностима и потребама друштва;
- развијају способности потребне за решавање проблема и нових ситуација у процесу рада и свакодневном животу.

Наведени циљеви недвосмислено потврђују да је веома значајан рад на развоју правилног логичког мишљења и закључивања, комбинаторних способности, систематичности и функционалног размишљања. С тим у вези, сматрамо да у постојећим наставним програмима, посебно редовне наставе, није довољно простора посвећено комбинаторици и сродним темама.

НАСТАВНИ ПРОГРАМ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ – ДОДАТНА НАСТАВА

• ТРЕЋИ РАЗРЕД

Логичко-комбинаторни проблеми. Ребуси.

• ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

Магични квадрати. Пребројавање скупова тачака, фигура и бројевних скупова. Проблеми пресипања. Задаци нумерације.

• ПЕТИ РАЗРЕД

Пребројавање скупова тачака, фигура и бројевних скупова.

• ШЕСТИ РАЗРЕД

Дирихлеов принцип. Логичко-комбинаторни проблеми.

• СЕДМИ РАЗРЕД

Логичко-комбинаторни задаци. Пребројавања. Графови.

- ОСМИ РАЗРЕД

Логичко-комбинаторни задаци. Графови. Комбинаторика на шаховској табли. Инваријанте.

НАСТАВНИ ПРОГРАМ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ – РЕДОВНА НАСТАВА

- ПРВИ РАЗРЕД

Логика и скупови. Елементи комбинаторике (пребројавање коначних скупова: правило збира и правило производа).

- ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

Основна правила комбинаторике. Варијације, пермутације; комбинације (без понављања). Биномни образац. Вероватноћа и статистика.

НАСТАВНИ ПРОГРАМ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ – ДОДАТНА НАСТАВА

- ПРВИ РАЗРЕД

Елементи топологије. Графови и неке њихове примене. Тополошке инваријанте. Род површи. Ојлерова формула и неке њене примене. Историјски осврт. Логички и комбинаторни задаци. Разни начини решавања логичких задатака (укључујући апарат исказне алгебре). Пребројавање коначних скупова.

- ДРУГИ РАЗРЕД

Логичко-комбинаторни и слични нестандартни задаци (Дирихлеов принцип, комбинаторна геометрија и др.).

- ТРЕЋИ РАЗРЕД

Логичко-комбинаторни задаци. Разни нестандартни и „главоломи“ задаци (проблеми куглица, математичко-шаховске „главоломије“, разне математичке игре, криптографија и др.). Математичка индукција, рекурентне формуле и примене.

- ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

Елементи комбинаторике и вероватноће. Основна правила комбинаторике. Варијације, пермутације, комбинације. Биномни образац и неке његове примене. Простије функције генератрисе у комбинаторици. Вероватноћа и њено израчунавање, условна вероватноћа, геометријска вероватноћа. Бернулијева шема и др. Елементи теорије игара. Појам игре и стратегије игре. Цена игре, матрица игре. Основна теорема теорије игара.

3. Варијације, пермутације, комбинације

Варијације без понављања

ДЕФИНИЦИЈА 1. *k -варијација без понављања елемената скупа A је уређена k -торка различитих елемената скупа A .*

ПРИМЕР 1. Написати све 2-варијације без понављања елемената скупа $\{a, b, c\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Број k -варијација без понављања елемената скупа који има n елемената једнак је $n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)$.*

Варијације с понављањем

ДЕФИНИЦИЈА 2. k -варијација с понављањем елемената скупа A је уређена k -торка елемената скупа A .

ПРИМЕР 2. Написати све 3-варијације с понављањем елемената скупа $\{a, b\}$.

ТЕОРЕМА 2. Број k -варијација с понављањем елемената скупа који има n елемената једнак је n^k .

Пермутације

ДЕФИНИЦИЈА 3. Пермутација скупа A који има n елемената је n -варијација без понављања елемената скупа A .

ПРИМЕР 3. Написати све пермутације скупа $\{a, b, c\}$.

ТЕОРЕМА 3. Број пермутација скупа који има n елемената једнак је $n!$.

Пермутације с понављањем

ДЕФИНИЦИЈА 4. Дат је скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и на њему строги линеарни поредак $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Нека су $k_1, k_2, \dots, k_n$ природни бројеви и $k_1 + k_2 + \dots + k_n = t$. Пермутација с понављањем скупа A типа $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ је уређена t -торка елемената скупа A , у којој се сваки елемент a_j појављује тачно k_j пута.

ПРИМЕР 4. Написати све пермутације с понављањем скупа $\{a, b, c\}$ типа $(1, 2, 1)$.

ТЕОРЕМА 4. Број пермутација с понављањем типа $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ скупа који има n елемената једнак је $\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$.

Комбинације

ДЕФИНИЦИЈА 5. k -комбинација елемената скупа A који има n елемената, где је $k \leq n$, јесте подскуп скупа A који има k елемената.

ПРИМЕР 5. Написати све 2-комбинације елемената скупа $\{a, b, c, d\}$.

ТЕОРЕМА 5. Број k -комбинација елемената скупа који има n елемената једнак је $\binom{n}{k}$.

Комбинације с понављањем

ДЕФИНИЦИЈА 6. Дат је скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и на њему строги линеарни поредак $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. k -комбинација с понављањем елемената скупа A је уређена k -торка $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ елемената скупа A , за које важи да је $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k$.

ПРИМЕР 6. Написати све 3-комбинације с понављањем елемената скупа $\{a, b, c\}$.

ТЕОРЕМА 6. Број k -комбинација с понављањем елемената скупа који има n елемената једнак је $\binom{k+n-1}{k}$.

ТЕОРЕМА 7. Број k -комбинација с понављањем елемената скупа који има n елемената, а у којима се сваки елемент тог скупа појављује бар једном, једнак је $\binom{n-1}{k-1}$.

ПРИМЕР 7. На колико начина може 10 особа да седне у позоришту у један ред који има 20 седишта?

Решење. Свака од тих особа бира расположива места у том реду. Прва од њих има 20 могућности, друга 19 и тако даље. Дакле, постоји $20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 11$ начина да се те особе распореде у реду.

ПРИМЕР 8. У једној земљи не постоје два становника с истим распоредом зуба. Колико највише становника живи у тој земљи?

Решење. На сваком од 32 места за зубе у вилицама, може и не мора бити зуб, па има 2^{32} могућности за распореде зуба. Дакле, у тој земљи има највише 2^{32} становника.

ПРИМЕР 9. Краљ се налази у доњем левом углу шаховске табле. На колико начина он може стићи до горњег десног угла ако може да се креће само удесно и нагоре?

Решење. Крећући се на описани начин краљ прави 7 померања десно и 7 померања нагоре. То се може урадити на $\frac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$ начина.

Задаци

1. На колико начина може бити оцењен ученик ако се оцењује из 12 предмета?
2. Списак чланова оркестра може да се направи на 5040 начина. Колико чланова има тај оркестар?
3. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ у којима је цифра 3 испред цифре 2?
4. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ у којима су цифре 2 и 3 једна поред друге?
5. На колико начина четири особе могу да поделе 20 различитих књига, тако да особа А добије 3, особа Б 4, особа Ц 6, а особа Д 7 књига?
6. На колико начина четири особе могу да поделе 20 различитих књига, тако да једна добије 3, друга 4, трећа 6, а четврта 7 књига?
7. Колико има четвороцифрених бројева чије цифре гледано слева на десно чине растући низ?
8. Колико има четвороцифрених бројева чије цифре гледано слева на десно чине неоппадајући низ?
9. На колико начина од 8 врста разгледница туриста може купити 3 не обавезно различите разгледнице?

4. Принципи пребројавања

Принцип једнакости (принцип бијекције)

Нека су A и B два непразна скупа. Ако постоји бијекција (обострано једнозначно придруживање) $f: A \rightarrow B$, онда је $|A| = |B|$.

ПРИМЕР 10. Дат је низ бројева 5, 9, 13, ..., 2017. Колико чланова има тај низ?

Решење. Уочимо функције $f_1: \{5, 9, 13, \dots, 2017\} \rightarrow \{4, 8, 12, \dots, 2016\}$,
 $f_1(x) = x - 1$ и $f_2: \{4, 8, 12, \dots, 2016\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 504\}$, $f_2(x) = \frac{x}{4}$.

$$f_1: \begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 & \cdots & 2017 \\ 4 & 8 & 12 & \cdots & 2016 \end{pmatrix}, \quad f_2: \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & \cdots & 2016 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 504 \end{pmatrix}.$$

Обе те функције су бијекције, баш као и њихова композиција $f_2 \circ f_1$, па по принципу једнакости (бијекције) следи да дати низ има 504 елемента.

Принцип производа

Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ непразни коначни скупови. Тада је

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

ПРИМЕР 11. Из града A у град B воде 3 пута, из града B у град C два пута, а из града C у град D 4 пута. На колико различитих начина се може стићи:

- из града A у град B ;
- из града A у град C идући кроз град B ;
- из града A у град D идући кроз градове B и C , и без враћања у град кроз који се прошло?

Принцип збира

Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ дисјунктни коначни скупови. Тада је

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

ПРИМЕР 12. Колико има двоцифрених природних бројева записаних цифрама 1, 2, 3, 4 и 5, таквих да је цифра јединица већа од цифре десетица?

Решење. Све такве бројеве можемо поделити у четири групе. У првој групи су они који почињу цифром 1 и њих има 4 (цифра јединица може бити 2, 3, 4 или 5). У другој групи су они који почињу цифром 2 и њих има 3 (цифра јединица може бити 3, 4 или 5). У трећој групи су они који почињу цифром 3 и њих има 2 (цифре јединица су 4 или 5) и у четвртој групи (они који почињу цифром 4) има само један број – 45. Дакле, таквих бројева има $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

ПРИМЕР 13. Колико има четвороцифрених природних бројева који у свом декадном запису садрже бар једну цифру 0?

Задаци

1. Колико има петоцифрених природних бројева код којих су бар две цифре једнаке?
2. На једној правој је дато m тачака, а на другој, паралелној с њом, дато је n тачака. Колико је одређено
 - а) троуглова;
 - б) четвороуглова
 с теменима у тим тачкама?
3. Извести формулу за број делилаца произвољног природног броја n представљеног у канонској факторизацији.
4. Три девојчице треба да поделе 4 лутке, 9 машиница и 10 оловки, тако да свака од њих добије бар по један предмет од сваког. На колико различитих начина то могу урадити?
5. На колико начина се могу поређати у низ бројеви $1, 2, \dots, 3n$ тако да се сваки број налази на месту чији редни број при дељењу са 3 даје исти остатак као и сам тај број.
6. Свака страница квадрата подељена је тачкама на n дужи. Колико има троуглова чија су темена деоне тачке, ако темена квадрата нису деоне тачке?

5. Принцип укључивања и искључивања

За коначне скупове $A_1, A_2, \dots, A_n$ важи да је

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Осим за израчунавање броја елемената уније коначних скупова, ова формула се може искористити и за израчунавање броја елемената пресека коначних скупова.

ПРИМЕР 14. У једној улици налазе се једна поред друге две вулканизерске радње: Левогумић и Десногумић. Радња Левогумић мења гуме само са леве стране аута, а радња Десногумић само са десне стране аута. Промена обе гуме са леве стране аута, исто као и са десне стране аута, траје 10 минута. Због почетка зимске сезоне возачи су дужни да промене све четири гуме. Једно јутро пред вулканизерским радњама се нашло 8 возача који желе да промене гуме. Због специфичности рада вулканизерских радњи прави се списак по којем возачи иду у једну или другу радњу које раде истовремено (наравно, на различитим колима). На колико начина се може направити тај списак, тако да време за које ће се завршити сав посао буде најмање могуће?

Решење. Под претпоставком да нема паузе између промена гума на два различита аута, најмање могуће време за које ће се завршити сав посао је 80 минута. То се постиже тако што се за било који списак аута за радњу Левогумић,

а таквих је $8!$, мора направити списак за радњу Десногумић такав да ниједан од 8 аута на том списку не буде под истим редним бројем као на списку за радњу Левогумић. Ако је за неки фиксиран списак аута за радњу Левогумић A_n , где $n \in \{1, 2, \dots, 8\}$, скуп свих спискова за радњу Десногумић таквих да се под редним бројем n налази ауто који је под тим редним бројем и на списку за радњу Левогумић, онда таквих спискова има колико и елемената скупа $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_8}$. Коришћењем формуле укључивања и искључивања добија се да је

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_8}| &= |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8}| = 8! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_8| \\ &= 8! - \left(\sum_{i=1}^8 |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 8} |A_i \cap A_j| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 8} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^7 |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8| \right) \\ &= 8! - \left(8 \cdot 7! - \binom{8}{2} \cdot 6! + \binom{8}{3} \cdot 5! - \dots - 1 \right) \\ &= 8! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \right). \end{aligned}$$

Укупан број начина на који се може направити тражени списак је

$$(8!)^2 \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \right).$$

Задаци

1. Колико има природних бројева мањих или једнаких 1000 који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5?
2. Колико има шестоцифрених бројева у чијем запису учествују три различите цифре?
3. Колико има пермутација $a_1 a_2 \dots a_n$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ таквих да за сваки број $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи $a_j \neq j$?
4. Пијани поштар треба да однесе 10 писама на 10 адреса. Не гледајући која је адреса на којој коверти он је разделио сва писма. На колико начина је он то могао урадити, тако да бар једно писмо стигне на адресу на коју је послато? А на колико начина је он то могао урадити, тако да тачно 4 писма стигну на адресе на које су послате?
5. У једном реду биоскопске сале има 12 седишта. На колико начина у тај ред може да седне 6 брачних парова, тако да ниједна жена не седне до свог мужа?
6. На колико начина се поља шаховске табле могу обојити с 8 различитих боја, тако да се у свакој врсти појављује свака боја и да у свакој колони никоја два суседна поља нису обојена истом бојом?
7. У воз који има m вагона пење се n ($n \geq m$) путника. На колико начина они то могу да ураде, тако да у сваки вагон уђе бар један путник?

6. Биномни коефицијенти и биномна формула

Ако је n природан број и x и y реални бројеви тада формулу

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

зовемо *биномна формула* или *биномни образац*. Бројеви $\binom{n}{k}$ су *биномни коефицијенти*. Важи $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Наводимо неке важне особине биномних коефицијената:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} & 5^\circ \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} &= 2^n \\ 2^\circ \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n}{k} & 6^\circ \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} &= 0 \\ 3^\circ \quad \binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} & 7^\circ \quad \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} &= \binom{m+n}{r} \\ 4^\circ \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 &= \binom{2n}{n} \\ 8^\circ \quad \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} &= \binom{n+k+1}{k} \\ 9^\circ \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

ПРИМЕР 15. У једном тениском мечу Ђоковић је победио Надала у два сета, резултатом 6:3, 6:4 у гемовима (сет добија играч који први освоји 6 гемова у том сету). Одредити број различитих начина на које се могао кретати резултат овог меча по гемовима. [Пријемни испит за ФОН 2023]

Решење. У последњем гему оба сета победио је Ђоковић. Дакле, резултат пре 6:3 у првом сету био је 5:3. Тај резултат се могао постићи на $\binom{8}{3}$ начина, јер је он једнак (на пример) броју начина да се распореди 5 слова Ђ и 3 слова Н у низу дужине 8.

На сличан начин добијамо да се у другом сету резултат могао мењати на $\binom{9}{4}$ начина. Број начина на које се могао кретати резултат целог меча је $\binom{8}{3} \cdot \binom{9}{4}$.

ПРИМЕР 16. У развоју степена бинома $\left(x\sqrt{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ биномни коефицијенти петог и десетог члана су једнаки. Да ли постоји члан у овом развоју који не садржи x ?

Решење. Из услова да су коефицијенти уз пети и десети члан тог развоја једнаки следи да је $\binom{n}{4} = \binom{n}{9}$, одакле се добија да је $n = 13$. Општи члан

развоја је

$$\binom{13}{k} (x\sqrt{x^3})^{13-k} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^k = \binom{13}{k} (x^{\frac{5}{2}})^{13-k} (x^{-\frac{3}{2}})^k = \binom{13}{k} x^{\frac{5}{2} \cdot (13-k) - \frac{3}{2}k},$$

па би за члан тог развоја у коме нема фактора x важило $\frac{5}{2} \cdot (13-k) - \frac{3}{2}k = 0$.

Међутим, како је решење последње једначине $k = \frac{65}{8}$ (није целобројно), то не постоји члан с наведеном особиним.

Задаци

1. Ако је збир коефицијената прва три члана у развоју степена бинома $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^n$ једнак 46, одредити члан тог развоја који не садржи x .
2. Колики је коефицијент уз трећи члан у развоју $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right)^{12}$?
3. Одредити збир свих коефицијената полинома $(3x^2 + 2x^3)^5$.
4. Одредити чланове развоја степена бинома $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})^{11}$ који нису ирационални.
5. Доказати да за произвољан скуп A код кога је $|A| = n$ важи $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, где је $\mathcal{P}(A)$ партитивни скуп скупа A .
6. Познато је да сет у стонотениском мечу траје до тренутка док један од играча не освоји 11 поена, а други нема више од 9 поена. Уколико се то не догоди (тј. ако је резултат у неком тренутку 10:10), игра се док један од играча не оствари предност од 2 поена разлике. Претпоставимо да је сет завршен резултатом 11:ш, где је $x \leq 9$. Колико има могућих различитих токова резултата у току сета?
7. Доказати да за природне бројеве m и n , такве да је $m \leq n$, важи

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

7. Проблеми разбијања броја

Комбинаторни проблеми овог типа заправо се свде на одређивање броја природних или ненегативних целих решења једначине

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Број решења у скупу природних бројева је $\binom{n-1}{k-1}$. Број решења у скупу ненегативних целих бројева је $\binom{n+k-1}{k-1}$.

ПРИМЕР 17. Мама је испекла 20 палачинки. На колико начина њено четворо деце могу да их поделе међу собом, али тако да свако дете добије бар по једну палачинку?

Решење. Проблем се може свести на решавање једначине $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ у скупу природних бројева, која има $\binom{19}{3}$ решења.

Решење је могуће приказати и сликовито. Поређајмо једну до друге 20 палачинки, као на слици. Уочимо да постоји 19 места, између суседних палачинки, на којима се могу поставити 3 „преграде“, тако да се све палачинке поделе на 4 групе. То такође потврђује да се одговарајућа подела може реализовати на $\binom{19}{3}$ начина.

⊕ ⊕ | ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ | ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ | ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

ПРИМЕР 18. Мама је испекла 20 палачинки. На колико начина њено четворо деце могу да их поделе међу собом?

Решее. У овом случају треба одредити број решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ у скупу ненегативних целих бројева.

Сменама $y_i = x_i + 1$, односно $x_i = y_i - 1$, за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, добија се еквивалентна једначина $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24$, таква да су јој решења у скупу природних бројева. Та једначина има $\binom{23}{3}$ решења.

Задаци

1. Три друга, Аца, Пера и Мика, продавали су старе стрипове и тако зарадили 8500 динара. На колико начина они могу да поделе тај новац ако сваки мора да добије бар 2000 динара?
2. На колико начина се 100 куглица може распоредити у шест кутија тако да у свакој кутији буде непаран број куглица?
3. Одредити број целобројних решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ која задовољавају следеће услове: $2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq x_3 \leq 6$, $3 \leq x_4 \leq 8$.

8. Математички ребуси

У проблемима с математичким ребусима циљ је дешифровати назначене операције и то тако да сваком слову одговара по једна цифра и да различитим словима одговарају различите цифре.

ПРИМЕР 19. Дешифровати:

$$\begin{array}{r}
 \text{O V E I} \cdot \text{E V O} \\
 \hline
 \text{E N A E} \\
 + \quad \text{I S E L} \\
 \quad \text{A V J J} \\
 \hline
 \text{L S L V A S E}
 \end{array}$$

Решење. Из датих услова и анализирања преноса при сабирању, једноставно се закључује да је $\boxed{L = 1}$, $\boxed{A = 9}$ и $\boxed{S = 0}$. Сада је

$$\begin{array}{r}
 \text{O V E I} \cdot \text{E V O} \\
 \hline
 \text{E N 9 E} \\
 + \quad \text{I 0 E 1} \\
 \quad \text{9 V J J} \\
 \hline
 \text{1 0 1 V 9 0 E}
 \end{array}$$

С обзиром да се производ $\overline{\text{OVEI}} \cdot \text{V}$, односно $\text{I} \cdot \text{V}$ завршава цифром 1, следи да је $\text{I} = 7$, $\text{V} = 3$ или $\text{I} = 3$, $\text{V} = 7$.

Могуће је једино $\boxed{\text{I} = 7}$, $\boxed{\text{V} = 3}$, јер за $\text{I} = 3$, $\text{V} = 7$ производ $\overline{\text{O7E3}} \cdot 7$ не би могао бити четвороцифрен број. Сада је

$$\begin{array}{r}
 \text{O 3 E 7} \cdot \text{E 3 O} \\
 \hline
 \text{E N 9 E} \\
 + \quad \text{7 0 E 1} \\
 \quad \text{9 V J J} \\
 \hline
 \text{1 0 1 3 9 0 E}
 \end{array}$$

Приметимо да при множењу $\overline{\text{O3E7}} \cdot 3$ код производа $\text{E} \cdot 3$ добијамо да се $\text{E} \cdot 3 + 2$ завршава цифром Е. То је могуће једино када је $\text{E} \in \{4, 9\}$. Пошто је цифра 9 већ искоришћена, следи да је $\boxed{\text{E} = 4}$.

Из $\overline{\text{O347}} \cdot \overline{\text{O}} = \overline{4\text{N}94}$ следи да је $\boxed{\text{O} = 2}$ и $\boxed{\text{N} = 6}$.

Преостаје још само да се одреди која цифра одговара слову J. Из

$$\begin{array}{r}
 \text{2 3 4 7} \cdot \text{4 3 2} \\
 \hline
 \text{4 6 9 4} \\
 + \quad \text{7 0 4 1} \\
 \quad \text{9 3 J J} \\
 \hline
 \text{1 0 1 3 9 0 4}
 \end{array}$$

следи да је $\boxed{\text{J} = 8}$.

Задаци

1. Дешифровати:

$$\begin{array}{r}
 \text{T E N} \\
 + \quad \text{T E N} \\
 \hline
 \text{F O R T Y} \\
 \hline
 \text{S I X T Y}
 \end{array}$$

2. Дешифровати:

$$\begin{array}{r}
 \text{AB} - \text{C} = \text{D} \\
 + \quad : \quad + \\
 \hline
 \text{A} + \text{E} = \text{F} \\
 \hline
 \text{AA} - \text{E} = \text{G}
 \end{array}$$

3. Дешифровати: $\text{M} : \text{A} = \text{T} - \text{E} = \text{M} \cdot \text{A} = \text{T} : \text{I} = \text{K} - \text{A}$.

4. Дешифровати:

$$\begin{array}{r}
 \text{ATU} + \text{IAZ} = \text{ПТЕ} \\
 - \quad - \quad : \\
 \hline
 \text{NEH} : \text{IOH} = \text{E} \\
 \hline
 \text{PAU} - \text{NZ} = \text{PPA}
 \end{array}$$

5. Реконструисати множење:

$$\begin{array}{r}
 * * * \cdot * * * \\
 \hline
 \quad * 0 * * \\
 + \quad * * 5 \\
 \hline
 * 3 * * \\
 \hline
 * * * * * 8
 \end{array}$$

6. Реконструисати дељење:

$$\begin{array}{r}
 * * * * * : * * * = * 8 * \\
 - * * * * \\
 \hline
 * * * \\
 - * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 - * * * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

7. Одредити највећи број сабирака за који је тачна једнакост

$$\overline{PI} + \overline{PI} + \dots + \overline{PI} = \overline{PILE}.$$

9. Магични квадрати

ДЕФИНИЦИЈА 7. Квадратна таблица димензија $n \times n$ која садржи природне бројеве од 1 до n^2 , распоређене тако да је збир бројева у свакој врсти, свакој колони и на свакој дијагонали константан, назива се магични квадрат реда n .

Тај константни збир зовемо *карактеристичним збиром* магичног квадрата и он је једнак

$$K = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n^2) = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Магични квадрат не мора бити састављен само од бројева од 1 до n^2 , већ му елементи могу бити и чланови неког растућег аритметичког низа. Нека је a почетни члан, а d разлика тог низа, тада је карактеристични збир једнак

$$K = \frac{1}{2}n(a + d(n^2 - 1)).$$

Магични квадрати реда 3 били су познати још пре нове ере, али се квадрати вишег реда појављују у новијем добу. Магични квадрат реда 4 помиње се у 12. веку нове ере у индијској, кинеској и грчкој литератури.

Операције с магичним квадратима

Ако се магични квадрат заротира за угао који је умножак од 90° или му се елементи „пресликају“ у односу на неку од четири осе симетрије, добија се магични квадрат с истим елементима у другачијем редоследу.

Занимљивије је да се од сваког магичног квадрата може добити нови магични квадрат примењујући неке од следећих операција:

1. Ако свим члановима магичног квадрата додамо (или одузмемо) исти број, добија се магични квадрат.
2. Ако све чланове магичног квадрата с карактеристичним збиром K помножимо истим бројем k , добија се магични квадрат с карактеристичним збиром $k \cdot K$.

3. Збир или разлика двају магичних квадрата истог реда је магични квадрат истог реда.

Још нека својства магичних квадрата

Ако је збир сваког пара централно симетричних елемената магичног квадрата једнак $n^2 + 1$, за такав магични квадрат се каже да је *симетричан*.

Ако се сваки елемент магичног квадрата одузме од $n^2 + 1$, добија се нови магични квадрат, који се назива *комплементом* полазног магичног квадрата.

Ако један или оба збира елемената на дијагоналама нису једнаки карактеристичном збиру, такав квадрат је *полумагичан*.

Магична коцка

Магична коцка је 3-димензионални еквивалент магичног квадрата, такав да су цели бројеви распоређени у облику $n \times n \times n$. Збир бројева у свим редовима, колонама и четири главне дијагонале је константан и назива се карактеристични збир магичне коцке. Изузетак од правила су дијагонале слојева. Карактеристични збир магичне коцке је $\frac{n(n^3 + 1)}{2}$.

Ако је и на дијагоналама слојева збир елемената једнак карактеристичном збиру, онда се ради о савршеној магичној коцки. Савршене магичне коцке реда 2, 3 и 4 не постоје, док су такве коцке реда 7 и 9 познате од краја 19. века. Од 2003. године познате су и савршене магичне коцке редова 5 и 6.

Задаци

1. **Шпанска тамница.** Затвор у близини шпанског града Кадиза је у облику квадрата са 16 ћелија. Гувернер је затвореницима нумерисаним бројевима од 1 до 15 дао задатак да се распореде тако да њихови бројеви чине магични квадрат, али да ни у једном тренутку у ћелији не може бити више од једног затвореника. У случају позитивног решења обећано им је ослобађање. На слици лево је дат распоред затвореника. Затвореник може прећи само у празну ћелију из ћелије која је суседна празној ћелији. Да ли је то могуће?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

10	9	7	4
6	5	11	8
1	2	12	15
13	14		3

Решење. На другој слици је приказан распоред затвореника који је такав да одговарајући бројеви одређују магични квадрат. До тог распореда се долази померањем затвореника у слободну ћелију следећим редом: 15, 14, 10, 6, 7, 3, 2, 7, 6, 11, 3, 2, 7, 6, 11, 10, 14, 3, 2, 11, 10, 9, 5, 1, 6, 10, 9, 5, 1, 6, 10, 9, 5, 2, 12, 15, 3.

2. Доказати да не постоји савршена магична коцка реда 3.

Латински квадрат

ДЕФИНИЦИЈА 8. Квадратна таблица димензија $n \times n$ чије је свако поље попуњено једним од n различитих елемената, распоређених тако да се у свакој врсти и свакој колони појављује сваки од тих елемената, назива се латински квадрат реда n .

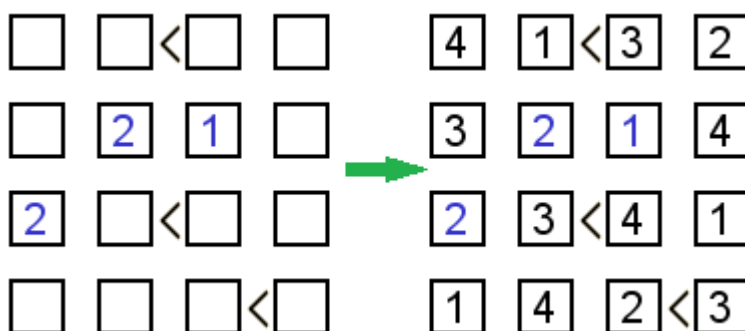
За елементе латинских квадрата се најчешће узимају елементи скупа $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ или слова абедице.

ПРИМЕР 20. Судоку је латински квадрат.

Футошики

Латински квадрат у чијим пољима су уписани природни бројеви од 1 до n који задовољавају још и неке дате неједнакости назива се футошики. Задаци базирани на футошикију обично су дати тако да се тражи да се дата бројевна мрежа допуни, ако је неколико поља попуњено, или су дате само неједнакости. Ова логичка загонетка потиче из Јапана.

ПРИМЕР 21. Представљено је решење једног футошики проблема.



10. Дирихлеов принцип

Основна верзија овог принципа гласи: *Ако скуп од $nk+1$ елемената треба да поделимо на k дисјунктних подскупова, тада бар један од тих подскупова садржи не мање од $n+1$ елемената.*

ПРИМЕР 22. На шаховском турниру учествује 8 играча. Игра свако са сваким. Доказати да се у сваком тренутку турнира могу наћи два играча са једнаким бројем до тада одиграних партија.

Решење. Ако су сви играчи, у тренутку посматрања, одиграли бар по једну партију онда је сваки од 8 играча одиграо бар једну, а највише 7 партија. По Дирихлеовом принципу следи да постоје два играча са истим бројем одиграних партија.

Ако постоји играч који није одиграо ниједну партију, онда не постоји играч који је одиграо свих 7 партија. Дакле, сваки од 8 играча је, у том тренутку, одиграо неки број од 0 до 6 партија. Слично као у претходном случају, по Дирихлеовом принципу следи да постоје два играча са истим бројем одиграних партија.

Задаци

1. У равни је дато 25 тачака тако да за сваке три од тих тачака постоје две чије је растојање мање од 1 cm. Доказати да постоји круг полупречника 1 cm који садржи бар 13 од датих тачака.
2. У правилном десетоуглу одабрано је 5 темена. Доказати да постоји једнакокраки троугао с теменима у одабраним тачкама.
3. Доказати да за сваки природан број n , који није дељив ни са 2, ни са 5, постоји природан број чије су све цифре јединице и који је дељив са n .
4. Свака од 13 правих дели квадрат на два четвороугла чије се површине односе као 5 : 2. Доказати да бар 4 од тих 13 правих имају заједничку тачку.
5. У унутрашњости квадрата чија је дужина странице 1 cm нацртано је неколико кругова. Збир обима свих кругова једнак је 10 cm. Доказати да постоји права која сече бар 4 од тих кругова.

11. Свођење на противречност

Свођење на противречност или, по Аристотелу, свођење на немогуће (лат. *Reductio ad absurdum*) један је од чешће коришћених доказа у математици. Овде се имплицитно користи закон контрадикције (свођење на апсурд) који тврди да једна категорична изјава не може бити истовремено и истинита и неистинита.

Сам метод логички се базира на таутологији $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$.

Доказивање тврђења овим методом састоји се у следећем: *ако хоћемо да докажемо неко тврђење, онда прво претпоставимо његову негацију. Ако ту негацију доведемо у противуречност (апсурд), онда смо тиме успели да докажемо само почетно тврђење.* Овакав начин доказивања често се назива индиректним.

Један од најстаријих математичких доказа изведених овом методом, а који се приписује Еуклиду, јесте познати доказ чињенице да постоји бесконачно много простих бројева.

ПРИМЕР 23. Шестокраке, седмобраке и осмобраке хоботнице служе подводном краљу. Оне које имају 7 кракова увек лажу, док оне са 6 или 8 кракова увек говоре истину. Једног дана среле су се 4 хоботнице. Плава је рекла: „Заједно имамо 28 кракова“, зелена: „Заједно имамо 27 кракова“, жута: „Заједно имамо 26 кракова“ и црвена: „Заједно имамо 25 кракова“. Које боје је хоботница која говори истину? [Кенгур без граница, 2010.]

Решење. Пошто постоје четири различите изјаве, то је или једна од њих тачна или ниједна.

Ако ниједна изјава није тачна, следи да су све хоботнице седмобраке и да је укупно 28 кракова, па би истину говорила плава хоботница, што је супротно нашој претпоставци.

Дакле, међу ове четири хоботнице једна говори истину, а преостале три лажу. Оне које лажу имају укупно 21 крак, док она хоботница која говори истину

може имати 6 или 8 кракова. Зато би укупан број кракова био 27 или 29. Пошто, по условима задатка, не постоји изјава да хоботнице имају 29 кракова, то закључујемо да све хоботнице имају заједно 27 кракова, а да је истину рекла зелена хоботница.

Задаци

1. Доказати да 10 ученика не може поделити 40 бомбона тако да сваки од њих добије различит број бомбона?
2. У врсти је 2014 особа. Свака особа је или лажљивац (који увек лаже) или краљ (који увек говори истину). Свака особа је рекла: „Има више лажљиваца с моје леве стране него краљева с моје десне стране.“ Колико има лажљиваца у тој врсти? [Кенгур без граница, 2014.]

12. Метод инваријанти

Својство математичког објекта које се не мења при некој трансформацији зове се *инваријанта* те трансформације. Обично се метод инваријанти користи за решавање задатака у којима се жели испитати може ли се вишеструком применом неке задате трансформације од математичког објекта (стања) X добити неки други математички објект (стање) Y . Уколико се нађе пример који показује како се то може учинити, тј. колико пута и како применити задату трансформацију, онда је одговор потврдан. Ако се пронађе инваријанта те трансформације која нема исте вредности за та два објекта, то значи да се применама те трансформације не може од X добити Y и одговор је одречан.

ПРИМЕР 24. Од бројева 1, 2, 3, 4, 5 и 7 бирају се три броја и повећавају за по 1. Може ли се понављањем те операције добити да сви бројеви буду једнаки?

Решење. Збир датих бројева је једнак 22. Повећавањем било која три од тих бројева за по 1, збир свих бројева се повећава за 3. Колико год пута да се примени та операција збир се сваки пут повећа за 3. Дакле, за збир почетних шест бројева, као и било који други збир добијен увећавањем нека три броја за по 1, важи да при дељењу са 3 даје остатак 1, што је инваријанта у овом случају.

Следи да се не може постићи, примењујући описану операцију, да свих шест бројева постану једнаки, јер би у том случају збир свих бројева био дељив са 3.

ПРИМЕР 25. На столу се налази 8 чаша. Три од њих су окренуте дном навише. Дозвољено је истовремено преврнути било које 4 чаше. Може ли се постићи да све чаше буду правилно постављене?

Решење. Обележимо чаше које су правилно постављене на сто са 1, а чаше окренуте дном навише бројем 0. Почетно стање је:

$$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0.$$

Збир свих тих бројева једнак је 5.

Окретањем било које 4 чаше на доле, четири броја 1 се мењају у 0, па се збир смањује за 4. Окретањем три чаше на доле, а једне на горе, збир бројева се

смањи за 2 и тако даље. При сваком окретању четири чаше збир бројева којима се описује стање 8 датих чаша промени се за неки паран број.

Како је збир који одговара почетној позицији једнак 5, то он не може постати 8. Дакле, инваријанта ове операције је парност збира.

Задаци

1. Пера је разрезао лист папира на 7 делова, а затим је неке од тих делова разрезао на нових 7, и тако редом. Да ли је могуће да је у неком тренутку имао испред себе 5285 делова папира?
2. Уређени пар целих бројева (m, n) можемо трансформисати у уређени пар (n, m) , $(m - n, n)$ или $(m + 2n, n)$. Може ли се од уређеног пара $(21, 15)$ добити уређени пар $(12, 20)$?
3. У једној врсти написана су три цела броја m , n и p . Испод ње, у другој врсти, написане су разлике бројева из претходне врсте $m - n$, $n - p$ и $p - m$. По истом правилу написани су бројеви у трећој врсти, итд. Постоје ли бројеви m , n и p , такви да се у некој врсти после седме може добити број: а) 30103; б) 40104?
4. Пера је на папиру написао 4514 нула и 4515 јединица. Он брише по два броја и ако су исти, уместо њих уписује јединицу, а ако су различити, онда нулу. Који ће број остати последњи написан на папиру?
5. На табли је редом написано првих 3747 природних бројева. У сваком кораку бришу се два произвољна броја, а уписује се апсолутна вредност њихове разлике. Да ли је могуће да после 3746 корака на табли остане написан број 1?
6. Из квадрата 100×100 подељеног на 10 000 јединичних квадратића „изрезан“ је један квадратић. Може ли се преостали део квадрата прекрити са 9999 једнакокрано-правоуглих троуглова чије су хипотенузе дужине 2, тако да се хипотенузе троуглова поклапају са ивицама квадратића, а катете са дијагоналама квадратића?
7. Квадрат 10×10 подељен је на 100 јединичних квадратића. Бира се 9 квадратића и обоји неком бојом. Затим се у сваком кораку обоје сви квадратићи који имају бар по два суседна квадратића обојена. Да ли се може направити такав избор почетних 9 квадратића да након неколико корака цео квадрат буде обојен?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. Младеновић, *Комбинаторика*, 5. изд, ДМС, Београд 2024.
- [2] В. Стојановић, *Математископ 3 – Збирка решених задатака за први разред средњих школа*, Математископ, Београд, 2007.
- [3] Група аутора, *1100 ЗАДАТАКА са математичких такмичења ученика основних школа 2015-2024. године*, 5. изд, ДМС, Београд, 2024.

М.Ј.: Математички факултет, Београд, Е-mail: milan.jovanovic@matf.bg.ac.rs

В.Ћ.: Ваљевска гимназија, Е-mail: cirovic@gmail.com