

Иља Узелац Бујишић

ЗАШТО СЕ (НЕ) КОЦКАТИ?

Једини начин да зарадите новац на рулету је да га украдете када крупније не гледа.

А. Ајнштајн (А. Einstein)

Укратко о радионици

Ова радионица је одржана за време манифестације „Мај месец математике“ (МЗ) и тако је на практичан начин ученицима показала основна својства вероватноће. Оно што радује је да је посећеност била одлична у свим градовима у којима је одржана (Београд, Ниш, Крагујевац и Косовска Митровица), те су у већини случајева ученици били мотивисани за игру и разумевање – „зашто једна страна константно добија игрицу, а друга нема среће“. Тако су им на практичан начин кроз игру и након ње објашњавани основни принципи вероватноће. На основу повратних информација наставника који су били присутни на радионици, може се закључити да је овај приступ био прилично ефикасан у објашњавању иначе прилично захтевне теме.

Теоријска подлога

У овом делу уводимо основни теоријски појам који је био темељ ове радионице.

Нека је X дискретна случајна променљива која може да узме вредности $x_1, x_2, \dots, x_n$ са одговарајућим вероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, где важи

$$p_i = P(X = x_i), \quad \text{за } 1 \leq i \leq n.$$

Тада је *оčekивана вредност* случајне променљиве X дефинисана као

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$$

Она представља просечну вредност коју бисмо очекивали ако бисмо експеримент понављали много пута.

Коцкарске игре

У овим радионицама, теоријски део се објашњава успут – док ученици играју разне игре. Прво се креира лажни „казино“ у којем ученици добију гомилу жетона и коцкица. Зависно од правила игре – ученици или играју једни против других, па међусобно тргују жетонима или играју „против куће“.

Оно што је главна предност ових игара је та да су једноставне за постављање и мењање правила (није неопходна нека сложена опрема, нпр. табла за игру или слично).

СВАКИ ДУПЛИКАТ ДАЈЕ ДУПЛИ ДОБИТАК

У овој игри у једном потезу улажете један жетон. Онда бацате две коцкице истовремено и тако добијете два броја. Уколико се бројеви на њима поклапају – добијате додатни жетон и враћа се уложени жетон. Уколико се не поклапају, уложени жетон се губи.

Игра се почиње са 10 жетона. Завршава се у моменту кад се стигне до 20 жетона или кад се изгуби све.

Објашњење

Очекивана зарада у једном бацању је

$$E[X] = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{2}{3} < 0.$$

Дакле, ова игра је изузетно неповољна по играча јер у 5 од 6 случајева губи уложени жетон док у преосталом добија само један додатни.

Након ове игре паметно је питати ученике: да би игра била поштена и по вас и по казино, колико би требало да добијете за свако поклапање ако се у добитак рачуна и уложени жетон?

Ако је одговор k , тада треба да буде

$$E[X] = k \cdot \frac{1}{6} - 1 = 0.$$

Дакле $k = 6$. До овог одговора долазе експериментално тако што играју са разним вредностима k и тако осете кад они добијају, а кад их кућа непоштено „пљачка“.

СВАКИ ДУПЛИКАТ ДУПЛИРА УЛОГ

У овој игри у једном потезу улажете 1-4 жетона. Онда бацате две коцкице истовремено и тако добијете два броја. Уколико се бројеви на њима поклапају – добијате дуплирани уложени износ у жетонима. Уколико се не поклапају, уложени жетони се губе.

Игра се почиње са 20 жетона. Завршава се у моменту кад се стигне до 50 жетона или кад се изгуби све.

Објашњење

Математика у овој игри је иста као у претходној, очекивана вредност је опет $-\frac{2}{3}$, једина разлика је то што сад могу да имају већи улог па самим тим већи губитак или већи добитак, зависно од среће.

У просеку ће овако још брже да изгубе јер је формула очекиване вредности иста за сваки жетон, а игра их подстиче да улажу више, тако да су у скоро свим случајевима брже губили у овом сценарију у односу на први.

Тако је ова игра корисна порука како казино користи идеју *великог добитка* само да би подстакао на *веће улагање* и најчешће самим тим *већи губитак*.

ТОР ЛАСКРОТ

У овој игри се улаже један жетон. Онда се истовремено бацају две коцкице. Зависно од резултата, добија се следећи број жетона:

$(6, 6) \mapsto 6$ жетона зараде,

$(3, 3) \mapsto 3$ жетона зараде,

$(6, 5) \mapsto 3$ жетона зараде,

$(5, 6) \mapsto 3$ жетона зараде.

Све друге комбинације доводе до губитка уложеног жетона.

Објашњење

У овој игри упркос великом потенцијалном добитку – плус 6 или плус 3 жетона – и даље игра није на страни играча. За сваки могући пар бројева (a, b) вероватноћа да се он појави бацањем коцкица је $\frac{1}{36}$, па је

$$E[X] = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} - 1 = -\frac{21}{36} < 0.$$

Ова игра је само за нијансу поштенија од прве, заправо је прилично лоша. Али због овакве поставке бројева, поготово плус 6 у случају $(6, 6)$, поучени првом игром, ученици често мисле да је поштена. Зато је важно пустити их да је играју, па им после објаснити како је и она потпуно намештена на страну коцкарнице.

ПАРНИ vs НЕПАРНИ

У овој игри играчи се деле у парове. На почетку сваки има по 10 жетона. Јасно се поделе на парног и непарног играча. Онда обојица бацају коцке истовремено. Ако је било који добио 6, *оба* бацања се понављају. Уколико нити један није добио 6, рачуна се збир коцкица. Уколико је збир *паран*, непарни играч даје један жетон парноме. Уколико је збир *непаран*, парни даје жетон непарном. Играч који први остаје без жетона је изгубио дуел.

Објашњење

Иако на први поглед ова игра делује симетрично у односу на Парног и Непарног, те ученици често помисле да су шансе равноправне – нису потпуно.

Укупно има 36 парова (a, b) могућих исхода – од тога 18 са парним и 18 са непарним збиром. Али, пошто су сви исходи који имају шестицу у себи избачени, игра се своди на парове облика (a, b) где је $1 \leq a, b \leq 5$ – овде има 13 парних и 12 непарних сума тако да Парни има благу предност.

У овом случају је однос снага у сваком потезу 13 : 12, дакле парни играч има 52% а непарни 48% шанси за победу. Пошто треба да се одигра много потеза (оба почињу са 10), предност парног најчешће почиње јасно да се види.

Овде се након игрице може јасно питати ко је добио – колико парних а колико непарних играча и тако се види како псеудосиметрија може наместити игру.

Ово је ситуација слична с правим рулетом и црвеним и црним пољима, где наоко оба имају 50% шансе, али постојање нуле смањује ту шансу *мало али довољно*. Пошто казино рачуна на доста партија, та мала разлика се почиње манифестовати исто као у овој игри.

Математички институт САНУ, Београд

E-mail: bujisiciljamat@gmail.com