НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXI, 1-2 (2016), 1–9

Ненад О. Весић

МАТЕМАТИЧКА ПОСЛАСТИЦА
Слова скривају бројеви откривају

Апстракт. У овом чланку приказано је, свођењем на најједноставније, како је математику, која важи за неразумљиву науку, могуће искористити да би се схватиле животно важне нејасноће и разрешиле одговарајуће дилеме. Овај рад даје наставницима пример како да ученицима детаљније објасне значај математике. Изнад свега, сва та објашњења – колико год теорија која стоји иза њих била компликована – веома су разумљива.

1. Увод

Није тајна да се математика, у очима већине ђака, перципира као страшна и неразумљива наука која, изузев сабирања – а везано за новац – нема много примена. Можда евентуално рачунање површина, камата и слично али ништа више од тога. Овај рад мотивисан је ранијим дугим истраживањем аутора и тежи да прикаже да математика може да објасни много тога што делује као необјашњиво. Тачније, у овом раду, математика ће настојати да дешифрује нејасноће везане за медицинске резултате, добијене у лабораторији, везане за крв, мокраћу и још по нешто.

Главни део овог чланка представљен је на фестивалу „Наук није баук" 2016. године у Нишу. Главни циљ тог представљања је да се покаже како математика, колико год апстрактном и нејасном изгледала, може да објасни само ако човек уме да јој постави питање.

1.1. Укратко о идеји

Још је Питагора сматрао да бројеви објашњавају све око нас док је Бертранд Расел у својој књизи [8] окупио Питагорина разматрања и наставио свој рад. Добро је познат Раселов парадокс у теорији скупова [7]. Многи математички парадокси обрађени су у дипломском раду [1].

Сви ти парадокси су, широј популацији, веома нејасни. Ни различите математичке теорије нису у много бољем положају али су парадокси прича за себе.

Овај рад финансијски је подржан од стране пројекта 174012 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

Аутор је, настојећи да себи – користећи своја математичка знања – објасни неке скривености у медицинским резултатима приказао начин како неразумљиве медицинске изразе претворити у бројеве [3]. У том раду је, између осталог, једноставним језиком реалних и комплексних бројева дат метод како лакше разумети оно што је, у детаљима, разумљиво једино лекарима и онима који се медицином детаљно баве. Ипак, ни они немају прецизан увид у стање пацијената као целине захваљујући разликама унутар самих медицинских скала и различитим угловима посматрања делова целине.

1.2. Мотивација

Човек, који се први пут у животу сусретне са проблемом у медицинским резултатима чије се уредне вредности налазе између датих бројних величина, данас излази на интернет и тражи објашњења везана за те резултате, тачније поремећаје, у потрази за одговором на питање колико је његово стање лоше. На интернету је могуће наћи различите грозоте које човеку никако не одговарају на питање колико је лоше то што је лоше код њега већ га само упућују на даље истраживање и следеће најгоре случајеве који даље продубљују страх.

Лекар му је, претходно, све објаснио али на начин који је крајње неразумљив широј популацији. Што се тиче свих осталих питања, везаних за детаље – а која се сама по себи намећу – човек их не поставља у жељи да не испадне глуп а лекар на њих не одговара јер углавном ни сам не зна како да све то објасни на, најпре себи, потпуно разумљив начин.

У овом чланку дати су одговори на нека од таквих питања језиком који може да разуме ученик првог разреда средње школе. Иако постоји начин да се све то објасни тим језиком, овај рад се осврће и на градиво друге године средње школе, везано за математику, да би приказао још један значај и могућу употребу бројева који се тек тада срећу први пут у животу ученика. Те недоумице, чији ће поступак разјашњавања бити приказан у овом раду, могу се искористити у вежбању задатака у раним разредима средње школе као показни примери шта математика све може да уради. Још битније, такве недоумице – које би креирао сам наставник – могу помоћи у савладавању рачунања код ученика односно увођењу ђака у свет информатике. Ђаци могу да програмски покрију све оно што ће бити наведено у овом раду.

Циљ овог рада није да прикаже нешто за шта је потребна каква посебна памет да би се разумело. Није циљ аутора да овде напише нешто компликовано, што ни он сам у потпуности не разуме, за шта ће многи рећи да је одлично јер ни они сами не схватају суштину. Циљ овог рада није да некога научи нечему већ да прикаже како је, на научно гледано исправан начин, могуће одговорити на наизглед бесмислена питања. Математика можда није свима најблискија али ово је прича која има за циљ да покаже шта је могуће урадити коришћењем чак и калкулатора на новијим мобилним телефонима. Када се човек сусретне са здравственим проблемима, који ће бити оцењени бројевима, неће морати да консултује интернет и разне форуме већ ће му бити довољна прича која следи да сам одговори на питања *колико је лоше* и *колико је озбиљно то што је лоше.*

2. Бројилац и именилац у медицинским резултатима

Да ли ико може да објасни број 5? Толико је прстију на једној руци човека, толико је прстију на једној нози човека, то је највећа оцена у основним и средњим школама, то је најнижа оцена на факултетима ... Сва ова објашњења дају броју 5 додатну суштину. За различите суштине тај број има различито значење. То је случај са сваким бројем, било целим, рационалним, реалним, комплексним.

Сам број 5, као такав, не носи са собом никакво практично значење. Он је прост, дељивост природног броја n са 5 узрокована је последњом цифром броја n ... Ипак, и поред све суштине природе бројева у којој суштине нема, они су неопходни човеку у оријентацији и то углавном добро раде. Међутим ...

За почетак пример. Човек дао крв на анализу у једној лабораторији где је установљен поремећај резултата PLT. Наиме, резултат у тој лабораторији је 90 док се уредне вредности налазе између 150 и 450. Зато га је лекар упутио у другу, референтнију, лабораторију где је одмах сутрадан резултат тог теста био 68 а уредни резултати су између 120 и 380.

Ако не зна, човек данас излази на интернет и проналази да је тест PLT заправо тест нивоа тромбоцита у крви [6]. Добро је познато да тромбоцити згрушавају крв при контакту са кисеоником и да постоји опасност од појачаног крварења ако их је мање у организму. Наравно, 90 је веће од 68 што директно наводи на закључак да се број тромбоцита у крви вртоглаво смањује.

Направимо малу дигресију. Да ли је могуће одредити који је од разломака $\frac{2}{}$ и $\frac{3}{}$ већи? Наравно да није. Фали именилац. А неједнакости $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ су обе тачне.

Медицински тестови, чији се уредни резултати налазе између две унапред знане вредности – а који су дати у претходном примеру – јесу попут разломака. Бројиоци тих разломака су резултати а имениоци су вредности између којих су резултати уредни (референтне вредности) и оба та податка равноправно утичу на то колико се стање променило. Закључак о вртоглавом паду тромбоцита у претходном примеру еквивалентан је одговору да је $\frac{2}{}$ мање од $\frac{3}{}$. Овакви тестови су, у раду [3], сврстани у четврту групу – *тестови са две коначне референтне вредности* (RRVT).

2.1. Колико је лоше одступило од уредног?

Пре свега, веома је важно да ли је резултат теста групе RRVT, који није уредан, мањи од мање или већи од веће референтне вредности. Нећемо ићи даље од тромбоцита. Када је тромбоцита мање од мање референтне вредности заиста прети појачано крварење. Међутим, ако је број тромбоцита већи од веће референтне вредности онда постоји опасност од стварања крвног угрушка унутар крвотока и та два стања се, у медицини, веома разликују.

Резултат r_k, k-тог теста групе RRVT, чије су референтне вредности α_k и β_k,

$\alpha_k < \beta_k$, да се оценити као:

$$e_k^4 = \begin{cases} \big(0,0\big), & \alpha_k \le r_k \le \beta_k, \\ \big(\dfrac{r_k-\beta_k}{\beta_k-\alpha_k},0\big), & r_k > \beta_k \\ \big(0,\dfrac{\alpha_k-r_k}{\beta_k-\alpha_k}\big), & r_k < \alpha_k. \end{cases} \tag{2.1}$$

У другом разреду средње школе, оног тренутка када се уведу комплексни бројеви [4], оцена (2.1) може добити форму

$$e_k^4 = \begin{cases} 0, & \alpha_k \le r_k \le \beta_k, \\ \dfrac{r_k-\beta_k}{\beta_k-\alpha_k}, & r_k > \beta_k \\ \dfrac{\alpha_k-r_k}{\beta_k-\alpha_k}i, & r_k < \alpha_k, \end{cases} \tag{2.2}$$

за имагинарну јединицу i, $i^2=-1$, као што је то урађено у раду [3].

Површно гледано, овакво оцењивање је само обична трансформација већ постојећих хијероглифа и није ништа јаснија од њих. Међутим, ако се детаљније погледају једначине (2.1), (2.2) доћи ће се до закључка да се тим поступком сваки могући резултат r_k посматраног теста трансформише на следећи начин:

$$r_k \mapsto \frac{r_k-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}, \tag{2.3}$$

што је на бројевној правој, математички – прецизније геометријски гледано – композиција

$$\tau_{\overrightarrow{OA_k}} \circ h_{\frac{1}{\beta_k-\alpha_k}}, \tag{2.4}$$

где је $\tau_{\overrightarrow{OA}}$ транслација тачке R_k, која на бројевној правој одговара резултату r_k, за вектор $-\overrightarrow{OA_k}$, где су O и A_k тачке бројевне праве које одговарају броју 0 и референтној вредности α_k редом, док је $h_{\frac{1}{\beta_k-\alpha_k}}$ хомотетија са коефицијентом $\dfrac{1}{\beta_k-\alpha_k}$ и са центром у тачки O. Ово је дозвољено радити јер, како је то Бертранд Расел лепо објаснио у [8], бројеви немају никакво значење без смисла. Разломци без имениоца, с почетка овог поглавља, то су на још једноставнији начин само потврдили.

Овим поступком референтне вредности α_k и β_k трансформишу се у

$$\alpha_k \to 0 \quad \text{и} \quad \beta_k \to 1, \tag{2.5}$$

чиме су различити тестови еквивализовани. Резултати и референтне вредности изражавају се у различитим мерним јединицама што се неутрализује хомотетијом. Поред тога, сви се они заједно са одговарајућим референтним вредностима множе – у неким тестовима – са 10^k, $k \in \mathbb{N}$, али хомотетија и то множење неутрализује.

На тај начин, бројевним резултатима тестова ове групе даје се суштина и тако ти бројеви добијају јаснији смисао.

Јасно је и то да што је координата различита од 0 мања/већа у оцени (2.1) то је стање боље/лошије. Аналогно важи и за комплексну оцену. Конкретно, оцене оба стања пацијента из мотивационог примера су 0.2 што говори да се број тромбоцита у његовој крви није стрмоглаво смањио како је то закључено на први поглед. Штавише, њихов број је остао непромењен у односу на уредно стање.

Пре наставка, ваља се подсетити да је збир уређених парова (a_1, b_1) и (a_2, b_2) уредјен пар $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Поред тога, удаљеност тачке $X(x_1, x_2)$ од координатног почетка $O(0, 0)$ Декартовог координатног система јесте $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Оцена лошости појединачног резултата мери се удаљеношћу оцене (2.1) од тачке $O(0, 0)$ гледано на бројевној правој, било хоризонталној било вертикалној.

Како су разломци, звани медицински тестови са две коначне референтне вредности, сваком од оцена (2.1), (2.2) специјалним проширивањем трансформисани у разломке са заједничким имениоцем (2.5) то је поменуте трансформисане разломке могуће сабирати по бројиоцима а са заједничким имениоцем. Стога, нека су

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \tag{2.6}$$

оцене облика (2.1) резултата појединачних тестова ове групе. Јасно је да је $a_k \cdot b_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Величине
(2.7)

$$e^4 = (a_1 + \cdots + a_n, b_1 + \cdots + b_n) \quad \text{и} \quad e^{Abs,4} = \sqrt{\left(a_1 + \cdots + a_n\right)^2 + \left(b_1 + \cdots + b_n\right)^2},$$

јесу *оцена целокупног стања* и *апсолутна оцена целокупног стања*, редом. У случају оцена (2.6) у облику комплексних бројева $z_k = a_k + b_k i$, $k = 1, \ldots, n$, оцене (2.7) постају

$$e^4 = z_1 + \cdots + z_n \quad \text{и} \quad e^{Abs,4} = |e^4|. \tag{2.8}$$

Оцене (2.7), или еквивалентно (2.8), могу окупљати резултате свих тестова али могу окупљати и само неке од свих тих резултата зависно од потреба. Ипак, шта год да се оцењује, оцена је јасна, прецизна и тачна и говори о томе колико посматрано стање одступа од уредног стања везано за оцењене резултате.

Како све ово функционише у пракси биће приказано на примеру крвне слике скинуте са интернета. Тај пример показује универзалност оцењивања помоћу (2.1), (2.2), (2.7), (2.8). Та универзалност може скинути камен са срца човеку који се први пут са тако нечиме сусретне. Она може помоћи лекару у објективнијем сагледавању ситуације. У сваком случају, такво оцењивање одговара на питање колико је то, што је лоше, одступило од уредног стања.

Крвна слика проверена је два пута. Први пут, у TEST-у 1, да се приметити више резултата који нису уредни него у TEST-у 2 (сл. 1). Табеларно, појединачне оцене резултата првог и другог тестирања у облику комплексних бројева су приказане у наредним табелама.

	TEST 1 22/08/09 11:02:00 PM	TEST 2 24/08/09 10:43:00 AM	reference range
WBC	14	7.5	3.9 – 10
LYM	1.9	3.2	0.8 – 5.0
MID	0.4	0.4	0.1 – 1.0
GRAN	11.7	3.9	1.6 – 7.0
RBC	5	5.37	3.7 – 5.9
HGB	153	160	110 – 180
HCT	0.42	0.49	0.35 – 0.54
MCV	84.5	90.3	81 – 99
MCH	30.6	29.8	26 – 32
MCHC	363	330	310 – 350
RDW	14.6	14.3	11.5 – 16.5
PLT	136	177	140 – 450
MPV	10.4	12.6	7.8 – 12.0

Слика 1. Пример крвне слике

WBC	0.655738
LYM	0
MID	0
GRAN	0.87037
RBC	0
HGB	0
HCT	0
MCV	0
MCH	0
MCHC	0.325
RDW	0
PLT	$0+0.00645161i$
MPV	0

WBC	0
LYM	0
MID	0
GRAN	0
RBC	0
HGB	0
HCT	0
MCV	0
MCH	0
MCHC	0
RDW	0
PLT	0
MPV	0.142857

На основу претходних оцена, као и на основу самих резултата, лекар може да донесе закључак о чему се тачно ради код пацијента. Први проблем јесте одговорити на питање колико је то лоше као целина, појединачно у TEST-у 1 и у TEST-у 2. Пацијент, који не зна шта је шта што је сакривено иза слова, том приликом креће у потрагу за суштином на интернету. Наравно, наћи ће шта су најгори случајеви и онда следи страх. Страх само погоршава постојеће лоше стање а одговор на своје питање тражилац не проналази.

Ипак, оцене (2.2), (2.8) као и оцене (2.1), (2.7) на једноставан начин и без икаквог посебног знања, осим тога што мора да се зна како употребити калкулатор, дају конкретан одговор на конкретно питање. Наиме, оцена укупног стања у TEST-у 1 је $1.85111 + 0.00645161i$ док је апсолутна оцена тог стања 1.85112.

Оцена укупног стања, као и апсолутна оцена, у TEST-у 2 су једнаке и износе 0.142857.

Дакле, укупно стање пацијента се поправило у TEST-у 2 у односу на TEST 1. Некога може интересовати колико. Одговор је сасвим једноставан, и једнак је разлици апсолутних вредности: 1.70826. Наметнуће се и питање колико то износи, процентуално гледано, у односу на први налаз. Тај одговор једнак је апсолутној укупној оцени резултата TEST-а 2 подељеној апсолутном укупном оценом резултата TEST-а 1 а након одузимања тог количника од 1 што износи износи $1 - \dfrac{0.142857}{1.85112} = 0.922827$ односно 92.2827%. Делује компликовано ... или можда не?

2.2. Колико је озбиљно то што је лоше?

Питање из наслова овог потпоглавља такође се лако намеће и води ка интернету. Утолико лакше дâ се пронаћи најтежи случај и утолико лакше ће се свако уплашити јер човек озбиљно прихвата углавном најкатастрофичније могућности. А и овде је одговор једноставан, само је мало више теоријски дат. Ипак, углавном се своди на најједноставнији могући случај.

Заправо, овде постоје два приступа. Први је тај да се, раздвојено, на један начин оцењује озбиљност лошег резултата већег од веће а на други начин озбиљност лошег резултата који је мањи од мање референтне вредности. Други приступ је да се уједначи мера озбиљности поремећаја везаних за резултате веће од веће и мање од мање референтне вредности.

- Први приступ

У овом приступу оцена e_k^4 резултата који је већи од веће референтне вредности је истовремено и оцена озбиљности тог поремећаја. Тај резултат, теоријски, може имати било коју вредност већу од веће референтне вредности. У пракси би наступила смрт али у теорији је могуће чак и то.

Са друге стране, резултати који могу бити мањи од мање референтне вредности углавном имају ограничења одоздо. Примера ради, тромбоцита не може бити -5 већ само 0 или више, чак и теоријски. Ни вредност 0 се не достиже у пракси али претпоставимо да се достиже.

Стога, нека је $m_k < \alpha_k$ најмањањи могући коначан резултат који се теоријски може добити у k-том тесту са референтним вредностима α_k и β_k, $\beta_k > \alpha_k$. Вредност m_k се, пратећи једначину (2.3), трансформише у $\tilde{m}_k = \dfrac{m_k - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}$. Како за различите k величина $\tilde{m}_k$ може бити различита најпре се, на све могуће трансформисане резултате мање од 0, примењује хомотетија са центром у $O(0,0)$ и коефицијентом $\dfrac{\beta_k - \alpha_k}{m_k - \alpha_k}$. Том хомотетијом оцена $\tilde{m}_k$ трансформише се у 1 а резултат $\dfrac{r_k - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}$ у $\dfrac{r_k - \alpha_k}{m_k - \alpha_k}$. Коначно, оцена озбиљности тог резултата је $\tilde{e}_k^4 = \dfrac{r_k - \alpha_k}{m_k - \alpha_k} i$.

Примера ради, мере озбиљности поремећаја тромбоцита са почетка овог поглавља ($m_k = 0$) су редом

$$\tilde{e}_k^4(90) = \frac{90-150}{0-150}i = 0.4i \quad \text{и} \quad \tilde{e}_k^4(68) = \frac{68-120}{0-120} = 0.433333i.$$

Све оцене озбиљности треба примати са дозом резерве јер зависе од више од два параметра (резултата и ближе референтне вредности).

- Други приступ

Овај приступ, попут Ајнштајнове опште теорије релативитета, има за циљ да упореди неупоредиво. Наиме, као што је већ речено, резултати већи од веће референтне вредности могу да буду бесконачно велики (теоретски, не и практично али ипак ...) док је први приступ посебну пажњу посветио одоздо ограниченим резултатима.

Пратећи идеју инверзије у односу на круг [5] (*Инверзија са центром у тачки* C *и полупречника* R *тачку* Z *трансформише у тачку* Z^* *полуправе* $[OZ)$ *такву да је* $|CZ|\cdot|CZ^*| = R^2$) дефинисане у Декартовој координатној равни [2] овај приступ обухватиће и оне резултате који могу, теоретски, бити једнаки $-\infty$. Оцена озбиљности поремећаја резултата $r_k < \alpha_k$ једнака је:

(2.9)

$$\tilde{\tilde{e}}_k^4 = \tilde{\tilde{e}}_k^4(r_k) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_k - r_k}{\beta_k - \alpha_k}i, & \text{у случају да је могуће } r_k = -\infty, \\ \dfrac{(m_k-\alpha_k)^2}{(\beta_k-\alpha_k)(r_k-m_k)}i, & \text{у случају да је теоретски } r_k \geq m_k, \end{cases}$$

где су α_k и β_k одговарајуће референтне вредности.

Добра страна овог другог приступа је што уједначава различитости између резултата већих од веће и мањих од мање референтне вредности али је проблем теоретски могуће оцене ∞ у случају да је $r_k = m_k$. Зато овај приступ неће детаљно бити проучаван у овом чланку. Све у свему, оцене стабилности резултата тромбоцита са почетка овог поглавља су

$$\tilde{\tilde{e}}^4(90)_k = \frac{(0-150)^2}{(450-150)(90-0)}i = 0.833333i \quad \text{и}$$

$$\tilde{\tilde{e}}_k^4(68) = \frac{(0-120)^2}{(380-120)(68-0)}i = 0.81448i.$$

Јасно је да је други резултат стабилнији од првог али ипак треба бити јако опрезан са овим оценама и никако их не прихватати без оцене одступања (2.1), (2.2).

Претходна два приступа унапредила су размишљање лекара на ту тему. Тачније, први приступ је пресликано размишљање лекара док је други приступ унапређење тог приступа.

3. Закључак

Једноставним језиком рачуна, разоткривене су неке од тајни сакривене словима (Слика 1) које се на живот и, првенствено, здравље односе. Те тајне разјашњене су детаљним објашњењем због чега се ради то што се ради. То детаљно објашњење је само прост рачун али је у њему смештена сва суштина таквог приступа проблему.

Паралелно се радило коришћењем уређених парова и комплексних бројева. Познаваоци математике знају да су та два приступа еквивалентна али ипак ... Мобилни телефони не подржавају комплексне бројеве. Због тога је значајно било, а зарад лаке примењивости, имати оба приступа на располагању.

Овакав приступ анализи и оцењивању медицинских резултата мотивисан је био правим медицинским скалама и нескладом међу њима као и унутар њих самих. Аутор је настојао да најпре премости те нескладе а онда је, пошто је у томе успео (рад [3]), проширио своје разматрање на комплетну анализу медицинских резултата.

Сам овај приступ анализи података може бити од изузетне користи у анализама података сродних медицинским по облику. На тај начин да се најпре утврдити шта се у експерименту догодило па тек онда вршити статистичка генерализација резултата. У сваком случају, овај рад је показао да математика није нејасна колико се нејасном сматра а још је мање бескорисна у животу за шта код многих ученика важи.

Математика је, у овом чланку, открила своју лепоту звану прецизност и једноставност што јој је како врлина тако и мана. То је врлина јер се да разумети али ако се једноставност користи само донекле без осврта на целину то се да и злоупотребити.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Агнеш, *Парадокси у математици*, дипломски рад, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, 2012, доступно на: `http://people.dmi.uns.ac.rs/~rozi/Master%20i%20diplomski%20radovi/Diplomski%20rad%20Barne%20Agnes.pdf`

[2] Н. О. Весић, *Инверзија различитих простора*, дипломски рад, Природно-математички факултет, Ниш, 2009.

[3] Н. О. Весић, *Математичко обједињавање различитости*, MAT-KOL (Бања Лука), XXI (4) (2015), 235–249.

[4] Г. Војводић, В. Петровић, Р. Деспотовић, Б. Шешеља, *Математика за други разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1996.

[5] K. Kozai, S. Libeskind, *Circle Inversions and Applications to Euclidean Geometry*, доступно на: `http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/InversionCompanion/inversion/inversionSupplement.pdf`

[6] И. Кризманић, З. Лазић, А. Холод, *Биологија 7: уџбеник биологије за седми разред основне школе*, Нови Логос, Београд, 2011.

[7] П. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург, Б. Боричић, *Математика за први разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2000.

[8] B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2nd ed., George Allen & Unwin, Ltd., London, 2010.

Природно-математички факултет, Ниш

E–mail: `vesic.specijalac@gmail.com`