др Шефкет Арсланагић

ЈЕДНА ТЕОРЕМА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ ТРОУГЛА И НЕКЕ ЊЕНЕ ПОСЉЕДИЦЕ

У овом чланку ћемо дати два доказа једне теореме из геометрије троугла, а нешто касније и неке посљедице те теореме. Ријеч је о сљедећој теореми.

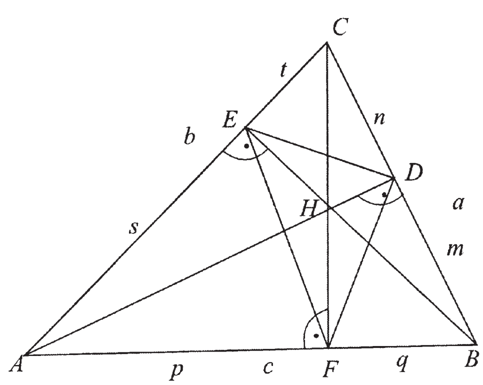
Збир производа висина оштроуглог троугла са својим одсјечцима од ортоцентра до тјемена једнак је полузбиру квадрата страница троугла.

Први доказ је приступачан ученицима основне школе, док су други доказ, те примјене ове теореме намењени старијим ученицима.

Доказ 1. Нека су AD, BE и CF висине троугла ABC, а тачка H његов ортоцентар (сл. 1). Треба доказати да важи слједећа једнакост:

$$AD \cdot HA + BE \cdot HB + CF \cdot HC = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}, \tag{1}$$

гдје су a, b, c дужине страница троугла ABC.



Слика 1

Нека је $AB = c = AF + BF = p + q$, $BC = a = BD + CD = m + n$ и $CA = b = AE + CE = s + t$. Правоугли троуглови BCE и BHD су слични, одакле је:

$$m : HB = BE : a, \quad \text{тј.} \quad BE \cdot HB = m \cdot a. \tag{2}$$

Слични су и троуглови BCH и FCD ($\angle FCB$ им је заједнички, док је $\angle CFD = \angle HBC$ јер су то периферијски углови над луком HD круга описаног око тетивног четвороугла $FBDH$), гдје уочавамо да вриједи $HC : BC = CD : CF$, тј.

(3) $$CF \cdot HC = a \cdot n.$$

Сабирањем једнакости (2) и (3), добијамо

(4) $$BE \cdot HB + CF \cdot HC = a(m+n) = a^2.$$

Даље, одаберимо два пара сличних троуглова, $\triangle ABE$ и $\triangle BHF$, те $\triangle ADF$ и $\triangle ABH$. Из прве сличности је:

(5) $$BE : c = q : HB, \quad \text{дакле} \quad BE \cdot HB = c \cdot q,$$

док из друге сличности имамо

(6) $$HA : c = p : DA, \quad \text{дакле} \quad DA \cdot HA = c \cdot p.$$

Сабирањем једнакости (5) и (6) добијамо

(7) $$BE \cdot HB + DA \cdot HA = c(p+q) = c^2.$$

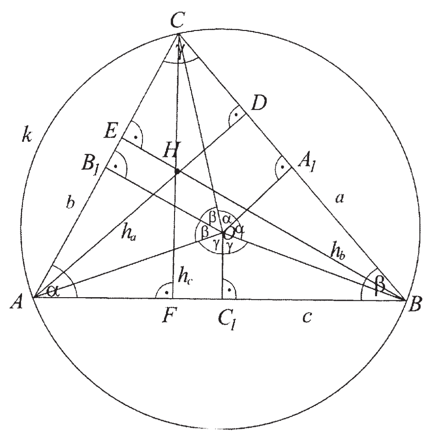
На сличан начин, такође из два пара сличних троуглова ($\triangle AHE \sim \triangle ACD$ и $\triangle ACH \sim \triangle FCE$) налазимо

(8) $$AD \cdot AH + CF \cdot HC = b(s+t) = b^2.$$

Сабирањем сада једнакости (4), (7) и (8) слиједи

$$2(AD \cdot HA + BE \cdot HB + CF \cdot HC) = a^2 + b^2 + c^2,$$

а одавде једнакост (1). ∎



Слика 2

Доказ 2. Да бисмо извели овај доказ користићемо неколико познатих ставова из геометрије троугла које нећемо доказивати:

(9) $$A_1O = \frac{1}{2}AH, \quad B_1O = \frac{1}{2}BH, \quad C_1O = \frac{1}{2}CH,$$

(10) $$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - 4Rr - r^2),$$

(11) $$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 - 4Rr - r^2}{2P},$$

гдје су a, b, c дужине страница оштроуглог троугла ABC, α, β, γ његови унутрашњи углови, тачка O је центар описане кружнице тог троугла, R и r су радијуси описане и уписане кружнице тог троугла, s је његов полуобим, P је његова површина, h_a, h_b, h_c су дужине његових висина, тачка H је његов ортоцентар, а тачке A_1, B_1, C_1 су подножја нормала из тачке O на одговарајуће странице BC, CA и AB троугла ABC (сл. 2).

Користећи (9), (10) и (11) добијамо

$$\begin{aligned}
h_a\cdot AH+h_b\cdot BH+h_c\cdot CH&=2A_1O\cdot h_a+2B_1O\cdot h_b+2C_1O\cdot h_c\\
&=2A_1O\cdot\frac{2P}{a}+2B_1O\cdot\frac{2P}{b}+2C_1O\cdot\frac{2P}{c}\\
&=2P\left(\frac{A_1O}{a/2}+\frac{B_1O}{b/2}+\frac{C_1O}{c/2}\right)=2P(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)\\
&=2P\cdot\frac{s^2-4Rr-r^2}{2P}=s^2-4Rr-r^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. ∎

Напомена 1. Докази једнакости (9), (10) и (11) се могу наћи у [3] и [4].

Напомена 2. У овом доказу смо користили чињеницу да је $\angle AOB=2\angle ACB$, тј. $\angle AOB=2\gamma$, а одавде $\angle AOC_1=\angle BOC_1=\gamma$, те аналогно $\angle BOA_1=\angle COA_1=\alpha$ и $\angle AOB_1=\angle COB_1=\beta$.

Да бисмо извели неке посљедице управо доказане теореме, доказаћемо двије неједнакости:

$$16Rr-5r^2\leqslant s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2, \tag{12}$$

$$2(12Rr-6r^2)\leqslant a^2+b^2+c^2\leqslant 2(4R^2+2r^2). \tag{13}$$

Неједнакост (12) је у литератури о геометријским неједнакостима позната као *неједнакост Герецена* (J.C. Gerretsen (1907–1983), холандски математичар). Да бисмо је доказали, користићемо познате обрасце за удаљеност значајних тачака троугла:

$$|IH|^2=4R^2+4Rr+3r^2-s^2, \tag{14}$$

$$|IT|^2=\frac{1}{9}(s^2+5r^2-16Rr). \tag{15}$$

гдје су I, H, T центар уписане кружнице, ортоцентар и тежиште троугла ABC. Како је $|IH|^2\geqslant 0$, то из (14) добијамо

$$4R^2+4Rr+3r^2-s^2\geqslant 0,\ \text{ тј. }\ s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2.$$

Како је $|IT|^2\geqslant 0$, то из добијамо

$$s^2+5r^2-16Rr\geqslant 0,\ \text{ тј. }\ s^2\geqslant 16Rr-5r^2.$$

Овим је доказана неједнакост (12). Једнакост у њој важи ако и само ако је $|IH|=0$ и $|IT|=0$, тј. $I\equiv H\equiv T$, што значи ако је у питању једнакостранични троугао.

Напомена 3. Још један доказ неједнакости (12) се налази у [2]. Докази једнакости (14) и (15) се могу наћи у [1].

Сада ћемо доказати неједнакост (13). Користићи једнакост (10), због неједнакости (12) је

$$2(16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr) \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - r^2 - 4Rr),$$

тј. важи неједнакост (13). Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$, тј. $R = 2r$ (једнакостранични троугао).

Из неједнакости (13) сада слиједи

$$12Rr - 6r^2 \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \leqslant 4R^2 + 2r^2. \tag{16}$$

Најзад из (1) и (16) добијамо неједнакост

$$16Rr - 6r^2 \leqslant AD \cdot HA + BE \cdot HB + CF \cdot HC \leqslant 4R^2 + 2r^2,$$

гдје једнакост важи само ако је у питању једнакостранични троугао.

У књизи [2], стр. 44 се налази неједнакост 4.7 која гласи

$$4P\sqrt{3} + Q \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 4P\sqrt{3} + 3Q, \tag{17}$$

гдје је $Q = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$. Сада из (1) и (17) слиједи неједнакост

$$\frac{1}{2}(4P\sqrt{3} + Q) \leqslant AD \cdot HA + BE \cdot HB + CF \cdot HC \leqslant \frac{1}{2}(4P\sqrt{3} + 3Q),$$

гдје важи једнакост ако је у питању једнакостранични троугао.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska rijeq, Sarajevo, 2005.

[2] O. Bottema, R.Ž. Đorđević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.

[3] A. Marić, Trokut, Element, Zagreb, 2007.

[4] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London, 1989.

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba