**Петар Свирчевић**

# ПРИМЕНА МНЕМОТЕХНИКЕ У АНАЛИТИЧКОЈ ГЕОМЕТРИЈИ У РАВНИ

Опште је познато да је мнемотехника скуп правила и начина која се изводе строго одређеним редом, како би се омогућило лако памћење што дужег низа сложених информација које се темеље првенствено на законима асоцијације идеја. У овом чланку ћемо, користећи мнемотехнику, дати правила и начине како лако и тачно попамтити најважније формуле и њихова значења у правоуглом координатном систему у равни, а која се односе на праву, површину троугла и криве другог реда. Идеја водиља за све ово ће бити дефинисање основних појмова који ће се контролисати димензионисањем и „унитирањем“.

Познато је да се појам може схватити као скуп основних обележја о некоме или нечему, но ми ћемо овде употребљавати и термин „основни појам“, који је још рестриктивнији у односу на први термин, наиме то је оно кад се нечега сећамо „кроз маглу“.

Због честе примене аналитичке геометрије у класичној механици, овде ћемо дати и димензионисања и унитирања основних величина из тог подручја.

## 1. Уопште о димензионисању и унитирању

Одмах на почетку ћемо дати објашњења која се односе на димензије и јединице математичких планиметријских и стереометријских, као и фузичких величина. Наиме, знамо да дужине страница ликова, полупречнике уписаних и описаних кружница, висина, ... меримо дужинским јединицама, док површине ликова и тела меримо површинским јединицама, а запремине тела запреминским јединицама.

На основу наведеног следи да је логично да се за сваку величину $a$ која представља број дужинских јединица уведе ознака

$$[a]_D = L,$$

што се чита као „димензија од $a$ је $L$“, а то је дужина. Дакле, не прецизирамо да ли се ради о метру ( m), центиметру ( cm), милиметру ( mm).

Слично ћемо за величину $P$ која представља број површинских јединица писати да јој је димензија једнака $L^2$, дакле

$$[P]_D = L^2.$$

И овде се не прецизира да ли се ради о $\mathrm{m}^2$, $\mathrm{cm}^2$, $\mathrm{mm}^2$, ... И коначно, за величину која представља број запреминских јединица дефинишемо да је

$$[V]_D = L^3.$$

Јасно је да је

$$[\lambda]_D = L^0 = 1,$$

где је $\lambda$ неименовани број, тј. $\lambda \in \mathbf{R} \cup \{0\}$.

Ове дефиниције можемо синтетизовати у општој дефиницији, која је

$$[x]_D = L^n, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Из (1) следе *правила о димензионисању* која гласе:

$$[a \pm b]_D = [a]_D = [b]_D, \tag{2}$$

$$[a \cdot b]_D = [a]_D \cdot [b]_D, \tag{3}$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]_D = \frac{[a]_D}{[b]_D}.$$

Правила (2) и (3) можемо уопштити, па добијамо да је:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]_D = [a_j]_D, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\left[\prod_{i=1}^{n} a_i\right]_D = \prod_{i=1}^{n} [a_i]_D.$$

Ако у (1) извршимо спецификацију, на пример, у физичком SI-систему, то ћемо означити као

$$[x]_U = \mathrm{m}^n,$$

где $\mathrm{m}$ има значење метра, а ознака за индекс $U$ је узета од енглеске речи *unit* (јединица), па ће се сам поступак звати „*унитирање*" (у инфинитиву „*унитирати*"). Јасно је да смо унитирање могли извршити и у $\mathrm{cm}$, $\mathrm{mm}$, ... , но та специјализација не би била у SI-систему.

### 1.1. Димензионисање и унитирање у механици

Добро је познато да се у механици димензија величине која представља масу означава са $M$, а оне која означава време са $T$. Следи да су димензије пређеног пута $[s]_D = L$, брзине $[v]_D = LT^{-1}$, убрзања $[a]_D = LT^{-2}$, силе $[F]_D = MLT^{-2}$, ... Ако те величине „унитирамо" у SI-систему, добијамо да је $[s]_U = \mathrm{m}$, $[v]_U = \mathrm{m\,s^{-1}}$, $[a]_U = \mathrm{m\,s^{-2}}$, $[F]_U = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$. Присетимо се да је сила у општем закону гравитације дата формулом $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, па одатле закључујемо да за гравитациону константу важи $[G]_D = M^{-1}L^3T^{-2}$ и $[G]_U = \mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}}$. Такође нам је познато да и све остале мерне јединице у механици можемо представити помоћу килограма, метра и секунде. Ако бисмо хтели да извршимо проширење, на пример, на науку о електрицитету, тада бисмо морали да уведемо још једну битно нову јединицу, рецимо *ампер*, којом се мери јачина струје. Слично важи за друге области физике (знамо да SI-систем има седам основних јединица), али тиме се овде нећемо бавити.

## 2. Права у координатној равни

### 2.1. Експлицитни облик једначине праве

Сада можемо прећи на *аналитичку геометрију у равни.* Пођимо од једначине праве која у експлицитном облику гласи $y = kx + l$. Јасно је да је $[y]_D = [x]_D = [l]_D$ и $[k]_D = 1$, јер је $k$ тангенс мере нагибног угла праве према позитивном делу осе $Ox$.

Како ћемо брзо скицирати график праве чија је једначина дата у експлицитном облику? Или, поставимо питање у облику: „Како ћемо „видети“ график праве, а да га не цртамо, ако је њена једначина дата у експлицитном облику?“ Пре него што дамо одговор на ово питање, наведимо један конкретан пример.

Рецимо да треба нацртати праву чија је једначина $y = \dfrac{2}{3}x + 4$. Лако се види да она пролази кроз тачке $T_1(0,4)$ и $T_2(3,6)$. Дакле, $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{6-4}{3-0} = \dfrac{2}{3}$, где је $\alpha$ мера нагибног угла праве према позитивном смеру апсцисне осе. Ту се појављује карактеристични правоугли троугао с теменима $T_1$, $T_2$ и $T_3(3,4)$. Ако је тај троугао „премали“, тада га можемо „повећати“, па узимамо да је $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2r}{3r}$ за $r > 1$, а за „смањивање“ узимамо $0 < r < 1$. Сврха овог подешавања је да цртање графика буде довољно прецизно, али да не „побегне“ с предвиђене површине за цртање.

У случају да коефицијент $k$ може да буде негативан, поступамо на следећи начин. Ако је $y = kx + l = \dfrac{a}{b}x + l$, тада је

$$y = \frac{a \operatorname{sgn} b}{|b|}\, x + l,$$

дакле права пролази кроз тачке $T_1(0,l)$ и $T_2(|b|, a\operatorname{sgn} b + l)$. И сада карактеристични правоугли троугао можемо „повећавати“ ако је $r > 1$, односно „смањивати“ ако је $0 < r < 1$, тако да права пролази кроз тачке $T_1(0,l)$ и $T_2(r|b|, ra\operatorname{sgn} b + rl)$.

Напоменимо и то да би алгоритам за брзу конструкцију праве могао да користи да она пролази корз тачке $A(0,l)$ и $B(-|b|, -a\operatorname{sgn} b - l)$.

### 2.2. Једначина праве кроз две тачке

Рецимо пар речи о једначини праве која садржи две дате тачке $T_i(x_i, y_i)$ (код којих је $x_1 \neq x_2$), где је $i = 1, 2$. Основно правило је да се једначина тражи у облику

$$y - y_? = \frac{y_? - y_?}{x_? - x_?}(x - x_?). \tag{4}$$

Тачке које одређују праву су међусобно „равноправне“, према томе свеједно је која је прва а која друга. Дакле, узмимо прво тачку $T_1(x_1, y_1)$ и запишимо (4) у облику

$$y - y_1 = \frac{y_? - y_?}{x_? - x_?}(x - x_1).$$

а након комплетирања имамо уобичајени облик једначине праве кроз две тачке који гласи

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{5}$$

На основу овога се добијају и следећи облици, еквивалентни са (5):

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2), \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad \dots$$

Но, треба да пазимо да основни облик од којег поллазимо не буде $y - y_? = \frac{x_? - x_?}{y_? - y_?}(x - x_?)$, јер када бисмо се „ослободили“ имениоца, тада би на једној страни једнакости били само $x$-ови, а на другој само $y$-и, а то је немогуће.

Приметимо да ако је, специјално, $y_1 = y_2$, тада једначина праве гласи $y = y_1$ (таква права је паралелна оси $Ox$). Ако за дате тачке $T_1$ и $T_2$ важи $x_1 = x_2$, онда се њена једначина не може добити на описани начин, али је очигледно да тада она гласи $x = x_1$ (права је паралелна оси $Oy$).

### 2.3. Сегментни облик једначине праве

Ако кроз тачке $A(m, 0)$ и $B(0, n)$ поставимо праву, тада њена једначина добија облик

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \tag{6}$$

који се зове *сегментни облик једначине праве.* Полазни облик за памћење једначине (6) је $\frac{x}{?} + \frac{y}{?} = 1$, с тим да онда „испод“ $x$ стављамо дужину одсечка који права гради на оси $Ox$, чија је вредност $m$. Аналогно, уместо ? „испод“ стављамо дужину одсечка на оси $Oy$, чија је вредност $n$. Притом да је $[m]_D = [n]_D = L$.

### 2.4. Имплицитни облик једначине праве

Када је једначина праве приказана у облику

$$Ax + By + C = 0, \tag{7}$$

тада се тај облик зове *имплицитни облик једначине праве.* Сада је $[A]_D = [B]_D = 1$ и $[C]_D = L$. Ако такву једнакост помножимо или поделимо реалним бројем $\lambda \neq 0$, добија се и даље имплицитни облик једначине праве, а то значи да величине $A$, $B$ и $C$ немају никакво геометријско значење, осим у једном посебном случају који ћемо расправити у следећој тачки.

### 2.5. Нормални или Хесеов облик једначине праве

Неопходан услов за овај облик гласи да је у (7) $A^2 + B^2 = 1$, а полазни услов (који памтимо) је да мора бити $?^2 + ?^2 = 1$, где се уместо ? уносе вредности коефицијената уз променљиве у једначини (7). Шта ако то није случај? Тада имплицитну једначину (7) делимо са $(-\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2 + B^2}$, па та једначина добија *нормални* или *Хесеов облик*

$$\frac{Ax + By + C}{(-\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \tag{8}$$

али мора бити испуњен услов да права не садржи координатни почетак, тј. да је $C \neq 0$. Полазни облик за (8) је $\dfrac{?x+?y+C}{(-\operatorname{sgn} C)\sqrt{?^2+?^2}} = 0$ и ту се уместо ? уносе вредности коефицијената уз променљиве из имплицитног облика. Дакле, и нормални облик једначине праве је имплицитни облик, док обратно не мора да важи.

Нека је, даље, $\psi$ мера нагибног угла између нормале на дату праву и позитивног дела апсцисне осе; тада је

$$\cos\psi = \frac{A}{(-\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\psi = \frac{B}{(-\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{9}$$

Из (9) следи да се (8) може писати у тригонометријском облику

$$x\cos\psi + y\sin\psi - \delta = 0. \tag{10}$$

Полазни облик за (10) је $x\cos ? + y\sin ? - \delta = 0$, где памтимо да је cos „важнији" од sin, а редом су везани за $x$ и $y$, и уместо ? уврштавамо $\psi$. Још напоменимо да је овде $\delta$ растојање дате праве од координатног почетка (видети и наредну тачку).

### 2.6. Растојање тачке од праве

Ако су дати тачка $T_0(x_0, y_0)$ и права $p$ једначином $Ax + By + C = 0$, тада је растојање те тачке од дате праве дато са

$$d(T_0, p) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{(-\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2+B^2}} = x_0\cos\psi + y_0\sin\psi - \delta. \tag{11}$$

Полазни облик за формулу (11) је исти као за формулу (10), само уместо променљивих $x$ и $y$ уврштавамо координате тачке $T_0$. Јасно је да тачка $T_0(x_0, y_0)$ припада правој $p$ онда и само онда када је $Ax_0 + By_0 + C = 0$, тј. када је $d(T_0, p) = 0$. Из (11) следи да је растојање координатног почетка $O(0, 0)$ од те праве

$$d(O, p) = \frac{C}{(-\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2+B^2}} = -\delta, \text{ односно да је } \delta = \frac{C}{(\operatorname{sgn} C)\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Из овога следи да је $d(T_0, p) > 0$ ако су дата тачка и координатни почетак с разних страна дате праве, а ако је тачка с исте стране са које је координатни почетак, тада је $d(T_0, p) < 0$. Но, ако нам је важна само апсолутна вредност растојања (без оријентације), можемо писати $d(T_0, p) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

### 2.7. Мера угла између двеју правих

Знамо да је тангенс мере оштрог угла између двеју правих $p_1$ и $p_2$, чије су једначине $y = k_i x + l_i$ $(i = 1, 2)$, дат са

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|, \tag{12}$$

а то значи да је $\left[\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|\right]_D = 1$. Јасно је да налажењем аркустангенса налазимо меру угла. Како ћемо запамтити наведену формулу? Морамо знати шта је основни појам у њој. Тај појам је $\operatorname{tg}? = \left|\frac{?_2-?_1}{1+?_1?_2}\right|$, а знамо да формула зависи од $k_1$ и $k_2$, јер ако се мењају одсечци $l_1$ и $l_2$ на оси $Oy$, тада се праве паралелно померају, што значи да се угао између њих не мења. Дакле, тангенс мере тог угла између двеју правих не зависи од тих одсечака, већ зависи само од коефицијената правца; или бисмо могли рећи да је тангенс мере угла инваријантан с обзиром на одсечке $l_1$ и $l_2$.

Да у формули (12) нисмо ставили апсолутну вредност, тада бисмо добили да је угао између правих $p_1$ и $p_2$ оштар ако је $\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} > 0$, односно туп ако је $\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} < 0$. Даље, ако је $k_2 = k_1$, тада су праве паралелне. И коначно, ако је $k_2 = -1/k_1$, тада су праве међусобно нормалне, дакле у случају када су коефицијенти међусобно реципрочни и супротног предзнака.

Ако су праве дате у имплицитном или сегментном облику, добија се да је

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|, \quad \text{односно} \quad \operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_1n_2 - m_2n_1}{m_1m_2 + n_1n_2}\right|.$$

Свакако, и за ове случајеве можемо „конструисати“ мнемотехничку формулацију ако нам те формуле често требају. На пример, оне би могле изгледати у две фазе овако: $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{?_1?_2-?_2?_1}{?_1?_2+?_1?_2}\right| = \left|\frac{?_1?_2-?_2?_1}{?_1?_2+?_1?_2}\right|$ или $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_?B_? - A_?B_?}{A_?A_? + B_?B_?}\right| = \left|\frac{m_?n_? - m_?n_?}{m_?m_? + n_?n_?}\right|$.

### 2.8. Симетрале углова између двеју правих

Ако су дате две праве које се секу, $p_i$: $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1, 2$, тада су симетрале углова које оне образују дате са

$$s_{1,2}: \quad \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \tag{13}$$

Лако се види да су ове праве међусобно нормалне. Полазни облик за (13) је дат формулом $\frac{?x+?y+?}{\sqrt{?^2+?^2}} \pm \frac{?x+?y+?}{\sqrt{?^2+?^2}} = 0$, где у бројиоце ових разломака треба уврстити по реду коефицијенте из имплицитног приказа једначина правих, а у имениоце коефицијенте уз непознате.

## 3. Систем од две линеарне једначине с две непознате

Знамо да се у аналитичкој геометрији често појављује потреба да се реши систем од две линеарне једначине с две непознате (нећемо улазити у дискусију решивости). Обично је тај систем дат у канонском облику

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{14}$$

а ако није, можемо га свести на тај облик. Овај систем ћемо решити помоћу детерминаната (постоје и многе друге методе). Присетимо се да је вредност детерминанте другог реда дефинисана на следећи начин:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Основно правило „каже“ да су компоненте решења једнаке количнику детерминанти, с тим да су детерминанте у имениоцима идентичне и састоје се од коефицијената уз непознате „у истом положају“ као у (14), дакле

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{15}$$

Сада у формуле (15) треба уврстити „колону“ слободних чланова $\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$, али то мора бити „равноправно“. Но, иде се по критеријуму да ти чланови у детерминантама у бројиоцима (15) за $x$ буду у првој колони, јер је и $x$ у систему (14) у „првој колони“; аналоган је принцип и за $y$. Дакле,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & ? \\ c_2 & ? \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} ? & c_1 \\ ? & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{16}$$

На крају, уместо „колона“ $\begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix}$ у бројиоцима једнакости (16) на њихова места сада упишемо кореспондентне колоне из имениоца, те коначно добијемо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{17}$$

Свакако, неопходан услов за постојање решења је да су имениоци (детерминанта система) у (17) различити од нуле, Ако то није, тада систем или нема решења или их има бесконачно много.

## 4. Површина троугла у координатној равни

Како ћемо запамтити формулу за површину троугла чија су темена тачке $T_i(x_i, y_i)$, где је $i = 1, 2, 3$? Ако нас не занима оријентација, тада је полазни облик за ту формулу

$$P = \frac{1}{2}\big|x_?(y_? - y_?) + x_?(y_? - y_?) + x_?(y_? - y_?)\big|.$$

Јасно је да морамо равноправно да употребимо све три апсцисе датих тачака, дакле

$$P = \frac{1}{2}\big|x_1(y_? - y_?) + x_2(y_? - y_?) + x_3(y_? - y_?)\big|. \tag{18}$$

Да би и ординате биле „равноправно“ заступљене у (18), њихове индексе ћемо циклички мењати, почевши с индексом апсциса. Дакле, имамо 123, 231, 312, па потпуна формула гласи

$$P = \frac{1}{2}\big|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big|.$$

Видимо да су и ординате „равноправно“ заступљене, јер је свака од њих једном на позицији умањеника а други пут на позицији умањиоца. Због равноправности координата, јасно је да важи

$$P = \frac{1}{2}\big|y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\big|. \tag{19}$$

Ако се присетимо дефиниције детерминанте трећег реда, онда (19) можемо написати у облику

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{abs}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{20}$$

где смо употребили ознаку abs за апсолутну вредност да не бисмо имали заједно две усправне црте (једну од знака апсолутне вредности, а другу од ознаке за детерминанту). Јасно је да би једна могућност полазног облика за ову формулу могла бити

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{abs}\begin{vmatrix} 1 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \end{vmatrix} \qquad \text{или} \qquad P = \frac{1}{2}\,\mathrm{abs}\begin{vmatrix} 1 & x_? & y_? \\ 1 & x_? & y_? \\ 1 & x_? & y_? \end{vmatrix}.$$

Помоћу *Сарусовог правила* за израчунавање ове детерминанте може се показати да су формуле (19) и (20) међусобно еквивалентне. Рецимо и то да детерминанте углавном нису у програму средње школе, али се често обрађују за једноставну примену у додатној настави математике. Свакако, то се односи на детерминанте другог и трећег реда.

Напоменимо још да формула $P = \frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big)$ уважава оријентацију, па добијамо да је $P > 0$ ако су темена „десно оријентисана“. Када је $P < 0$, тада су темена „лево оријентисана“. И коначно, када су темена колинеарна, троугао је дегенерисан у дуж па је тада $P = 0$. Важи и обратно.

## 5. Криве другог реда

Сада су дошле на ред криве другог реда у оним облицима који се обрађују у средњој школи. Дакле, навешћемо мнемотехнику за везе које се односе на централну кружницу, општу кружницу, елипсу, хиперболу и параболу. Пре него што пређемо на излагање о наведеним кривим, подсетимо се основног правила аналитичке геометрије: тачка припада некој кривој (или правој) ако и само ако њене координате задовољавају једначину те криве. Рецимо, такође, да ћемо неки пут поистоветити криву с њеном једначином, ради једноставности излагања.

### 5.1. Централна кружница

Можемо почети с централном кружницом, чија је једначина дата у облику

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{21}$$

и сада ћемо се позабавити условом додира праве и кружнице. У настави изводимо да права $y = kx + l$ додирује кружницу (21) ако и само ако важи

$$(k^2 + 1)r^2 = l^2. \tag{22}$$

Како то тачно запамтити? Нека полазни облик услова буде

$$(?^2 + 1)\,?^2 = ?^2 \quad \text{или} \quad (?^2 + 1)\,?^2 = l^2.$$

Могуће је да смо „запамтили“ формулу $(r^2 + 1)k^2 = l^2$ јер је она очито слична са (22), али ако извршимо димензионисање, тада следи да је $[(r^2+1)k^2]_D \neq [l^2]_D$ (лева страна нема смисла), јер је $[k]_D = 1$, а то значи да је тачно (22).

Сада ћемо још рећи како сигурно запамтити једначину тангенте кружнице (21) у њеној тачки $T_1(x_1, y_1)$. Свакако мора бити $x_1^2 + y_1^2 = r^2$. Полазни облик је кружница (21), тј. $x \cdot x + y \cdot y = r^2$, или $?x + ?y = r^2$. Ако у ту једначину уместо упитника уврстимо респективно координате тачке $T_1(x_1, y_1)$, тада добијамо формулу

$$x_1 x + y_1 y = r^2,$$

која је уствари једначина тангенте на кружницу у наведеној тачки. Та се формула лакше памти него да смо је писали у експлицитном облику

$$y = -\frac{x_1}{y_1}\,x + \frac{r^2}{y_1}.$$

### 5.2. Општа кружница

Пређимо сада на произвољну кружницу чија је једначина у општем облику

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{23}$$

Знамо да су параметри $p$ и $q$ уствари координате средишта те кружнице $S(p, q)$, па ако то средиште „падне“ у координатни почетак, тада (23) постаје (21). Јасна је и веза $[p]_D = [q]_D = L$. Како изгледа услов додира и како га упамтити? Он се лако добија у облику

$$(k^2 + 1)r^2 = (q - kp - l)^2. \tag{24}$$

Према томе, права $y = kx + l$ додирује кружницу (23) ако и само ако важи (24). Лева страна је иста као у (22), чију смо мнемотехнику објаснили, дакле сада је основни облик који треба запамтити

$$(k^2 + 1)r^2 = (?-?\cdot?-?)^2.$$

Да бисмо упамтили поредак параметара у (24), замишљамо *симбол капеле* $\lceil \overset{+}{q} \rceil$, и читамо као „**q**u**k**a**p**e**l**a“, па онда тим редом уносимо параметре $q, k, p, l$ у (21) и добијамо услов (24). Проверимо (24) димензионисањем. Видимо да је $[(k^2 + 1)r^2]_D = [(q - kp - l)^2]_D = L^2$. Ако извршимо специјализацију $p = q = 0$, средиште се налази у координатном почетку, а услов (24) прелази у (22).

Поставимо сада тангенту на кружницу (23) у тачки $T_1(x_1, y_1)$ која јој припада. Једначину (23) можемо писати у облику

$$(x-p)(x-p)+(y-q)(y-q)=r^2.$$

Основни облик за тражену тангенту је

$$(?-p)(x-p)+(?-q)(y-q)=r^2. \tag{25}$$

Ако у (25) уместо ? уврстимо координате тачке $T_1$, добијамо једначину

$$(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2,$$

која представља тражену тангенту. Ту једначину можемо писати у експлицитном облику

$$y=-\frac{x_1-p}{y_1-q}x+\frac{(x_1-p)p+(y_1-q)q+r^2}{y_1-q},$$

који није једноставан за дугорочно памћење.

Општи облик развијеног нормираног облика једначине (23) је дат као

$$x^2+y^2+ax+by+c=0, \tag{26}$$

који се лако памти. Видљиво је да је средиште тачка $S(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. Даље, дужина полупречаника ове кружнице је $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$, а полазни облик за ову везу је $r=\sqrt{\frac{?^2}{4}+\frac{?^2}{4}-?}$, где се уместо ? редом уврсте параметри $a, b, c$ из (26). Рецимо и то да се кружница (26) редукује у тачку ако је $a^2+b^2=4c$, а да је кружница имагинарна ако је $a^2+b^2<4c$.

### 5.3. Елипса

Сада ћемо изнети мнемоттехнику за неке релације које се односе на *елипсу*. Ако елипса има средиште у координатном почетку а жиже на апсцисној оси, тада је њена једначина дата у облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{27}$$

при чему је $a>b$. Елипса прелази у кружницу ако је $a=b=r$, дакле ако то уврстимо у (27), добија се (21), што је било и очекивати. Знамо да права $y=kx+l$ додирује елипсу (27) ако и само ако је

$$a^2k^2+b^2=l^2. \tag{28}$$

Полазни облик за овај услов додира је

$$?^2k^2+?^2=l^2,$$

а ако у њега уврстимо редом $a$ и $b$ (дужине полуоса елипсе), тада добијамо (28). А ако извршимо специјализацију $a=b=r$, тада се добија услов (22), што смо и очекивали.

Даље, рецимо да је једначина тангенте у тачки $T_1(x_1, y_1)$ елипсе дата у облику

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Полазни облик и мнемотехника су слични као код кружнице, па их нећемо наводити.

Ако су жиже елипсе на ординатној оси, тада је $a < b$, па је услов додира дат са $a^2 + b^2k^2 = l^2$, а релација (22) важи и у овом случају ако извршимо специјализацију $a = b = r$.

### 5.4. Хипербола

Што се тиче *хиперболе*, у поређењу с елипсом само се на одређеним местима мења предзнак, тако да је овде сувишна дискусија преко полазних облика. наиме, једначина хиперболе је

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ако су жиже на апсцисној оси, а ако су оне на ординатној оси, онда је једначина дата у облику

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Даље, респективно су дати услови додира:

$$a^2k^2 - b^2 = l^2, \quad \text{односно} \quad -a^2k^2 + b^2 = l^2,$$

а једначине тангенте у тачки $T_1(x_1, y_1)$ тих хипербола су:

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \text{односно} \quad -\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

### 5.5. Парабола

И на крају рецимо нешто о мнемотехници која се односи на *параболу.* Ако је теме параболе у координатном почетку а жижа на позитивном делу апсцисне осе, тада је њена једначина дата са

$$y^2 = 2px. \tag{29}$$

С обзиром да параметар $p$ има значење удаљености жиже од директрисе, то је $[p]_D = L$, па из (29) следи $[y^2]_D = [2px]_D = L^2$.

Даље, права $y = kx + l$ додирује параболу (29) ако и само је испуњен услов „**2klup**e“, дакле услов додира за параболу је $2kl = p$, а његов полазни облик је

$$2 \cdot ? \cdot ? = ?.$$

Свакако да се не можемо забунити и написати $2k = lp$, јер је $[2k]_D = 1$, а $[lp]_D = L^2$.

Како запамтити једначину тангенте у датој тачки параболе? Једначину (29) пишемо у облику

$$yy = p(x + x),$$

па ако ту уврстимо координате дате тачке $T_1(x_1, y_1)$ параболе, добијамо формулу

$$y_1 y = p(x_1 + x), \tag{30}$$

што представља тражену једначину тангенте. Полазни облик за (30) је $?y = p(? + x)$.

Лако се нађу и мнемотехнички запамте услови додира за параболе чије су једначине $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$.

На крају рецимо и то да смо могли још анализирати линеарни и нумерички ексцентрицитет, као и случајеве када су елипса, хипербола и парабола транслиране у равни, али не и заротиране, јер се то углавном не сматра елементарним градивом.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Dehaene, *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press, 1997.

[2] J.L. Heilborn, *Geometry Civilized*, Oxford University Press, 1998.

[3] Д. Хилберт, *Основе геометрије*, Математички институт, Београд, 1957.

[4] A. Lipkovski, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1995.

[5] B. Pavković, *Metoda posebnih sluqajeva*, HMD, Zbornik radova šestog susreta nastavnika matematike, Zagreb, 1994.

[6] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika, I, II*, Školska knjiga, zagreb, 1994.

[7] M. Petrović-Torgašev, *Analitička geometrija*, PMF, Kragujevac, 1995.

[8] P. Svirčević, *Mnemotehnika u analitičkoj geometriji*, Peti kongres nastavnika matematike RH, zagreb, 2012.

*E-mail*: petar.svircevic@zg.t-com.hr