НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Марко Кошчица

КАРАКТЕРИЗАЦИЈА ОРТОЦЕНТРА ОШТРОУГЛОГ ТРОУГЛА

У овом чланку ћемо на више начина доказати следеће тврђење.

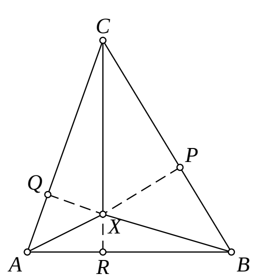
Теорема 1. *Нека је X тачка у унутрашњости оштроуглог $\triangle ABC$. Тачка X је ортоцентар $\triangle ABC$ ако и само ако је $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX$ и $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX$.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Ако је X ортоцентар $\triangle ABC$, онда је $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = 90^\circ - \measuredangle ABC$ и $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX = 90^\circ - \measuredangle CAB$.

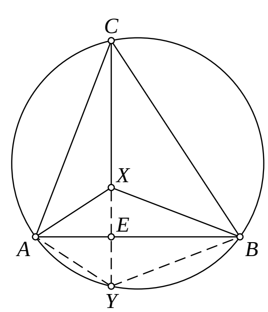
($\Longleftarrow$) Овај смер доказаћемо на више начина.

Први начин (помоћу сличности троуглова).

Уведимо ознаке $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = \varphi$, $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX = \theta$, $\measuredangle CAX = \varepsilon$ и $\measuredangle CBX = \delta$. Нека су P, Q и R подножја нормала из тачке X редом на странице BC, AC и AB, слика 1. Како је $\triangle CPX \sim \triangle ARX$, то је $XP = \dfrac{CX \cdot XR}{AX}$. Из сличности $\triangle CQX$ и $\triangle BRX$ добијамо да је $XQ = \dfrac{CX \cdot XR}{BX}$. Дељењем последње две једнакости добијамо да је $\dfrac{XP}{XQ} = \dfrac{BX}{AX}$, а како су троуглови AQX и BPX правоугли, применом Питагорине теореме непосредно се добија да је $\dfrac{XQ}{AQ} = \dfrac{XP}{BP}$, па је $\triangle AQX \sim \triangle BPX$. Из сличности је $\measuredangle QAX = \measuredangle PBX$ тј. $\varepsilon = \delta$. Из чињенице да је $\varepsilon + \varphi + \theta + \delta + \varphi + \theta = 180^\circ$, тј. $\varepsilon + \varphi + \theta + \varepsilon + \varphi + \theta = 180^\circ$, добијамо да је $\varphi + \theta + \varepsilon = 90^\circ$ и сада се непосредно закључује да су праве AX, BX и CX нормалне редом на праве BC, AC и AB, одакле следи да је тачка X ортоцентар $\triangle ABC$.



Слика 1



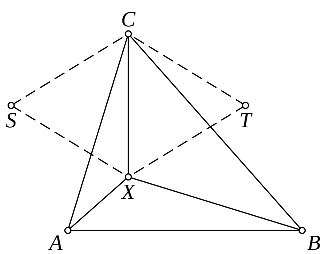
Слика 2

Други начин (коришћењем тетивног четвороугла).

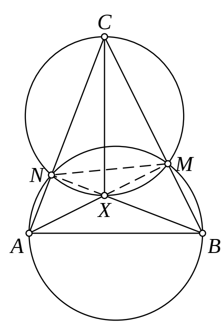
Уведимо ознаке $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = \varphi$, $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX = \theta$. Нека је Y тачка симетрична тачки X у односу на праву AB и E пресечна тачка дужи XY и AB, слика 2. Тада је $\measuredangle AEX = 90^\circ$. Како је $\measuredangle ACB = \measuredangle ACX + \measuredangle BCX = \theta + \varphi$, а $\measuredangle AYB = \measuredangle AXB = 180^\circ - \measuredangle BAX - \measuredangle ABX = 180^\circ - \varphi - \theta$, то је $\measuredangle ACB + \measuredangle AYB = 180^\circ$, па је четвороугао $ACBY$ тетиван. Следи да је $\measuredangle ACY = \measuredangle ABY = \measuredangle ABX = \theta$. Како је и $\measuredangle ACX = \theta$, следи да су тачке C, X, E и Y колинеарне, па је $CX \perp AB$. Сада се непосредно добија да је $\measuredangle XAC = \measuredangle XBC$, одакле се добија да је $\measuredangle XAC + \measuredangle ACB = 90^\circ$, па је $AX \perp BC$. Следи да је тачка X ортоцентар $\triangle ABC$.

Трећи начин (помоћу подударности троуглова).

Уведимо ознаке $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle BCA = \gamma$, $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = \varphi$, $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX = \theta$, слика 3. Како је $\measuredangle BCX = \measuredangle BAX$, то кругови описани око $\triangle BXC$ и $\triangle AXB$ имају једнаке полуречнике, а како је $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX$, то кругови описани око $\triangle AXB$ и $\triangle CXA$ имају једнаке полупречнике. Одавде следи да кругови описани око $\triangle CXA$ и $\triangle BXC$ имају једнаке полупречнике, па ако су S и T центри кругова описаних редом око $\triangle CXA$ и $\triangle BXC$, онда је $SC = SX = TX = TC$. Следи да је четвороугао $CSXT$ ромб, а како су наспрамни углови ромба једнаки то је $\measuredangle CSX = \measuredangle CTX$. На основу теореме о центаралном и периферијском углу је $\measuredangle CSX = 2\measuredangle CAX = 2(\alpha - \varphi)$ и $\measuredangle CTX = 2\measuredangle CBX = 2(\beta - \theta)$. Следи да је $\alpha - \varphi = \beta - \theta$, тј. $\alpha + \theta = \beta + \varphi$. Како је $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, тј. $\alpha + \beta + \varphi + \theta = 180^\circ$, то је $\alpha + \theta = \beta + \varphi = 90^\circ$. Следи да је $AX \perp BC$ и $BX \perp AC$, па је X заиста ортоцентар $\triangle ABC$.



Слика 3



Слика 4

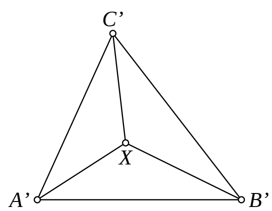
Четврти начин (помоћу тетивних четвороуглова).

Нека је M пресечна тачка правих AX и BC, а N пресечна тачка правих BX и AC. Како је $\measuredangle MCN + \measuredangle NXM = \measuredangle MCN + \measuredangle AXB = \measuredangle ACX + \measuredangle BCX + \measuredangle AXB = \measuredangle ABX + \measuredangle BAX + \measuredangle AXB = 180^\circ$, то је четвороугао $MCNX$ тетиван, па је $\measuredangle NMX = \measuredangle NCX$. Како је по претпоставци теореме $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX$, то је $\measuredangle NMA = \measuredangle ABN$, па је четвороугао $ABMN$ такође тетиван. Из тетивности је $\measuredangle AMB = \measuredangle ANB$. Из тетивности четвороугла $MCNX$ је још $\measuredangle AMB + \measuredangle ANB =$

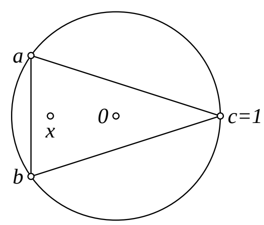
180°, па је $\measuredangle AMB = \measuredangle ANB = 90^\circ$. Сада је очигледно да је тачка X ортоцентар $\triangle ABC$.

Пети начин (помоћу инверзије у односу на круг).

Уведимо ознаке $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = \varphi$, $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX = \theta$, $\measuredangle CAX = \varepsilon$ и $\measuredangle CBX = \delta$. Нека је ψ_k инверзија у односу на круг $k = k(X, r)$, при чему се k налази у равни $\triangle ABC$ и $r > 0$, слика 5. Означимио $A' = \psi_k(A)$, $B' = \psi_k(B)$ и $C' = \psi_k(C)$. Тада је $\measuredangle B'A'X = \measuredangle ABX = \theta$, $\measuredangle C'A'X = \measuredangle ACX = \theta$, па је права $A'X$ симетрала $\measuredangle C'A'B$. Такође $\measuredangle A'B'X = \measuredangle BAX = \varphi$, и $\measuredangle C'B'X = \measuredangle BCX = \varphi$, па је права $B'X$ симетрала $\measuredangle A'B'C'$. Како се симетрале унутрашњих углова код сваког троугла секу у једној тачки, закључујемо да је права $C'X$ симетрала $\measuredangle B'C'A'$, па је $\measuredangle B'C'X = \measuredangle A'C'X$. Како је $\measuredangle A'C'X = \measuredangle CAX = \varepsilon$ и $\measuredangle B'C'X = \measuredangle CBX = \delta$, то је $\delta = \varepsilon$. Сада се непосредно добија да је X ортоцентар $\triangle ABC$.



Слика 5



Слика 6

Шести начин (коришћењем тригонометрије).

Уведимо ознаке $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = \varphi$, $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX = \theta$, $\measuredangle CAX = \varepsilon$ и $\measuredangle CBX = \delta$. Применом синусне теореме на $\triangle CXA$ је $\sin\varepsilon = \dfrac{CX}{AX}\sin\theta$, а применом синусне теореме на $\triangle BXC$ је $\sin\delta = \dfrac{CX}{BX}\sin\varphi$. Дељењем ових двеју једнакости добијамо да је

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \frac{BX}{AX}\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}. \tag{1}$$

Применом синусне теореме на $\triangle AXB$ је $\dfrac{BX}{AX} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}$. Из последње једнакости и једнакости (1) се добија да је $\sin\varepsilon = \sin\delta$, а како су углови ε и δ оштри, а функција sin строго растућа на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$, то је $\varepsilon = \delta$. Сада се непосредно добија да је X ортоцентар $\triangle ABC$.

Седми начин (помоћу комплексних бројева).

Раван у којој се налази $\triangle ABC$ посматраћемо као комплексну раван у којој је свакој тачки додељен комплексан број. Као што је то уобичајено, подразумеваћемо да тачкама $A, B, C, \ldots$ одговарају комплексни бројеви $a, b, c, \ldots$, слика 6. Јединични круг биће круг полупречника 1 чији је центар у нули. За сваку тачку z јединичног круга важи $|z|^2 = 1$, тј. $z \cdot \bar{z} = 1$, односно $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Лема 1. $ab \parallel cd$ ако и само ако је $\dfrac{a-b}{\bar a-\bar b}=\dfrac{c-d}{\bar c-\bar d}$.

Лема 2. $ab \perp cd$ ако и само ако је $\dfrac{a-b}{\bar a-\bar b}=-\dfrac{c-d}{\bar c-\bar d}$.

Лема 3. $\varphi=\measuredangle acb$ (од a до b у позитивном смеру) ако и само ако је

$$\frac{c-b}{|c-b|}=e^{i\varphi}\frac{c-a}{|c-a|}.$$

Лема 4. За тетиву ab јединичног круга важи $\dfrac{a-b}{\bar a-\bar b}=-ab$.

Нека је круг описан око троугла abc јединични и нека је при томе $c=1$. Уведимо ознаке у скаду с претпоставком теореме $\measuredangle bax=\measuredangle xcb=\varphi$ и $\measuredangle xba=\measuredangle acx=\theta$. На основу Леме 3 је $\dfrac{a-x}{|a-x|}=e^{i\varphi}\dfrac{a-b}{|a-b|}$ и $\dfrac{c-b}{|c-b|}=e^{i\varphi}\dfrac{c-x}{|c-x|}$. Из ових једнакости се добија да је

$$\frac{a-x}{|a-x|}\frac{|a-b|}{a-b}=\frac{c-b}{|c-b|}\frac{|c-x|}{c-x}.$$

Квадрирањем последње једнакости, коришћењем чињенице да за произвољан комплексан број z важи $|z|^2=z\bar z$, као и чињенице да за произвољне комплексне бројеве p,q важи $\overline{p-q}=\bar p-\bar q$, добијамо следећу једнакост $\dfrac{a-x}{\bar a-\bar x}\dfrac{\bar a-\bar b}{a-b}=\dfrac{c-b}{\bar c-\bar b}\dfrac{\bar c-\bar x}{c-x}$. На основу Леме 4 је $\dfrac{a-b}{\bar a-\bar b}=-ab$ и $\dfrac{c-b}{\bar c-\bar b}=-cb=-1\cdot b=-b$, а како је $\bar a=\dfrac{1}{a}$, добијамо да је

$$\frac{a-x}{1-a\bar x}=b^2\cdot\frac{1-\bar x}{1-x}. \tag{2}$$

Аналогно се из чињенице да је $\measuredangle xba=\measuredangle acx=\theta$ добија да је

$$\frac{b-x}{1-b\bar x}=a^2\cdot\frac{1-\bar x}{1-x}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) добијамо да је $a^2\dfrac{a-x}{1-a\bar x}=b^2\dfrac{b-x}{1-b\bar x}$, а после множења и сређивања да је

$$a^3-b^3-(a^2-b^2)x-ab(a^2-b^2)\bar x+ab(a-b)x\bar x=0.$$

Како је $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ и $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ и $a\neq b$, то дељењем последње једнакости ненултим изразом $a-b$ добијамо

$$a^2+ab+b^2-(a+b)x-ab(a+b)\bar x+abx\bar x=0,$$

тј.

$$ab(x-(a+b))\bar x=(a+b)x-a^2-ab-b^2. \tag{4}$$

Ако би било $x=a+b$, тада би било $\dfrac{x-a}{\bar x-\bar a}=\dfrac{b}{\bar b}=\dfrac{b-0}{\bar b-\bar 0}$, па би на основу Леме 1, права ax била паралелна правој која садржи тачку b и центар описаног круга троугла abc, што је немогуће, с обзиром да се, по претпоставци теореме, тачка

x налази у унутрашњости троугла abc, као и тачка $o = 0$, центар описаног круга троугла abc. Следи да је $x - a - b \neq 0$, па је

$$\bar{x} = \frac{(a+b)x - a^2 - ab - b^2}{ab(x-(a+b))} = \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{x-(a+b)}. \tag{5}$$

Из (2) и (3) се редом добијају једнакости

$$b - x - bx + x^2 = a^2 - a^2\bar{x} - a^2 b\bar{x} + a^2 b\bar{x}^2 \tag{6}$$

и

$$a - x - ax + x^2 = b^2 - b^2\bar{x} - b^2 a\bar{x} + b^2 a\bar{x}^2. \tag{7}$$

Ако се од једнакости (7) одузме једнакост (6) добија се

$$a - b - (a-b)x = b^2 - a^2 + (a^2 - b^2)\bar{x} + ab(a-b)\bar{x} - ab(a-b)\bar{x}^2.$$

Дељењем последње једнакости ненултим изразом $a - b$ добија се једнакост $1 - x = -(a+b) + (a+b)\bar{x} + ab\bar{x} - ab\bar{x}^2$, која конјуговањем прелази у једнакост $1 - \bar{x} = -\dfrac{a+b}{ab} + \dfrac{(a+b)x}{ab} + \dfrac{x}{ab} - \dfrac{x^2}{ab}$, Множењем једнакости са ab, убацивањем израза (5) за $\bar{x}$, добија се једнакост

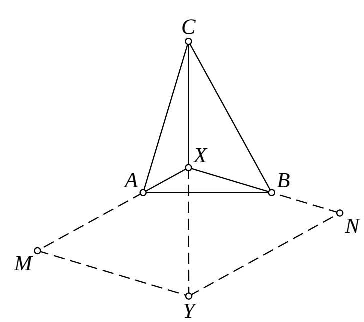
$$\frac{ab(x-(a+b+1))}{x-(a+b)} = x(a+b+1-x)$$

која је еквивалентна, редом, са

$$\begin{gathered}(x-(a+b+1))(x^2-(a+b)x+ab) = 0,\\ (x-(a+b+1))(x-a)(x-b) = 0\end{gathered}$$

Како је $x \neq a$ и $x \neq b$, то је $x = a + b + 1$. Како је $\dfrac{x-a}{\bar{x}-\bar{a}} = \dfrac{b+1}{\bar{b}+1} = \dfrac{b+1}{\frac{1}{b}+1} = b$, и на основу Леме 4, $\dfrac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} = -bc = -b \cdot 1 = -b$, то је $\dfrac{x-a}{\bar{x}-\bar{a}} = -\dfrac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}$, па је на основу Леме 2, $ax \perp bc$. Лако се добија да је и $bx \perp ac$, па је x заиста ортоцентар троугла abc.

Осми начин (коришћењем скаларног производа).



Слика 7

Уведимо ознаке $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle BCA = \gamma$, $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = \varphi$, $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX = \theta$. Тада је

$$\frac{\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{CA}|} = \frac{\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AX}||\overrightarrow{AB}|}, \qquad \frac{\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BX}||\overrightarrow{BA}|}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CX}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{CB}\\
&\overset{(8)}{=} -\frac{|\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{BX}||\overrightarrow{BA}|}\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BA} + \frac{|\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AX}||\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&= \frac{|\overrightarrow{CX}|}{|\overrightarrow{AB}|}\Big(\frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{BX}|}\overrightarrow{BX} + \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AX}|}\overrightarrow{AX}\Big)\cdot\overrightarrow{AB}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Нека су M и N тачке, такве да је $\overrightarrow{XM} = \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AX}|}\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{XN} = \frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{BX}|}\overrightarrow{BX}$. Тада је $XM = BC$ и $XN = AC$. Нека је даље Y тачка, таква да је четвороугао $XMYN$ паралелограм. Како су суседни углови паралелограма суплементни, то је $\measuredangle XMY = 180^\circ - \measuredangle AXB = 180^\circ - (180^\circ - \varphi - \theta) = \varphi + \theta = \gamma$. Следи да је $\triangle YXM \cong \triangle ABC$, па је $XY = AB$, $\measuredangle YXM = \beta$ и $\measuredangle YXN = \measuredangle XYM = \alpha$. Из једнакости $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XM}$ и једнакости (9) добијамо да је

$$\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{AB} = \tfrac{|\overrightarrow{CX}|}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{AB}. \tag{10}$$

Како је $\measuredangle(\overrightarrow{CX},\overrightarrow{AB}) = \beta+\varphi$, а $\measuredangle(\overrightarrow{XY},\overrightarrow{AB}) = \alpha+\theta$, то је

$$\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{AB}|\cos(\beta+\varphi)$$

и

$$\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{AB} = \tfrac{|\overrightarrow{CX}|}{|\overrightarrow{AB}|}|\overrightarrow{XY}||\overrightarrow{AB}|\cos(\alpha+\theta) = |\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{AB}|\cos(\alpha+\theta).$$

Сада једнакост (10) постаје $|\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{AB}|\cos(\beta+\varphi) = |\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{AB}|\cos(\alpha+\theta)$, па скраћивањем последње једнакости изразом $|\overrightarrow{CX}||\overrightarrow{AB}|$, добијамо да је $\cos(\beta+\varphi) = \cos(\alpha+\theta)$. Како су углови $\beta+\varphi$ и $\alpha+\theta$ између 0° и 180° и како је функција cos строго опадајућа на интервалу $(0,\pi)$, закључујемо да је $\beta+\varphi = \alpha+\theta$. Сада се лако изводи да је тачка X ортоцентар $\triangle ABC$. ∎

Допунимо доказану теорему и следећим тврђењем.

Теорема 2. *Нека је X тачка у унутрашости оштроуглог $\triangle ABC$. Тачка X је ортоцентар $\triangle ABC$ ако и само кругови описани око $\triangle AXB$, $\triangle BXC$ и $\triangle CXA$ имају једнаке полупречнике.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Ако је X ортоцентар $\triangle ABC$ онда је $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX = 90^\circ - \measuredangle ABC$. Нека је тачка M средиште дужи BX, а тачке O_1 и O_2 центри кругова описаних редом око $\triangle AXB$ и $\triangle BXC$. Тада је $\measuredangle XO_1M = \frac{1}{2}\measuredangle XO_1B = \frac{1}{2}2\measuredangle BAX = \measuredangle BAX$ и слично $\measuredangle XO_2M = \measuredangle BCX$, па је $\measuredangle XO_1M = \measuredangle XO_2M$, а како је $\measuredangle O_1MX = \measuredangle O_2MX = 90^\circ$, следи да је на основу става УСУ: $\triangle O_1MX \cong \triangle O_2MX$. Из подударности је $O_1X = O_2X$, тј. кругови описани око $\triangle AXB$ и

$\triangle BXC$ имају једнаке полупречнике. Аналогно се доказује да и кругови описани око $\triangle BXC$ и $\triangle CXA$ имају једнаке полупречнике. Следи да су полупречници кругова описаних око $\triangle AXB, \triangle BXC$ и $\triangle CXA$ једнаки.

($\Longleftarrow$) Претпоставимо сада да је X тачка у унутрашњости $\triangle ABC$ таква да кругови описани око $\triangle AXB, \triangle BXC$ и $\triangle CXA$ имају једнаке полупречнике. Како су периферијски углови над подударним тетивама кругова једнаких полупречника једнаки или суплементни, то је $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX$ или $\measuredangle BAX + \measuredangle BCX = 180°$. Међутим, како су $\measuredangle BAX$ и $\measuredangle BCX$ оштри, мора бити $\measuredangle BAX = \measuredangle BCX$. Аналогно је $\measuredangle ABX = \measuredangle ACX$, па је на основу Теореме 1 тачка X ортоцентар $\triangle ABC$. ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Радовановић, *Комплексни бројеви у геометрији*, `srb.imomath.com`.

[2] М. Крстић, *Примена комплексних бројева у планиметрији*, Математика и информатика, 2, св. 1 (2013), Ниш.

E-mail: `markocos10@hotmail.com`