Марија Лекић

ИЛУСТРАЦИЈА ТЕЖИШТА МАСА У СОФТВЕРСКОМ ПАКЕТУ GeoGebra

Увод

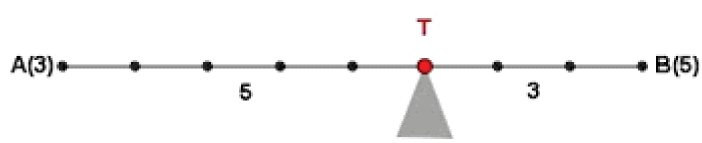
Својствима тежишта маса (центра маса, тежишта) бави се област настала комбинацијом механике и геометрије. Са њом се ученици сусрећу још у основној школи. Даљим школовањем стичу се знања и услови да се овом облашћу овлада у већој мјери. У раду ће бити дат приказ тежишта маса, од дефиниције, преко метода за одређивање, до приказа у софтверском пакету GeoGebra. Рад је замишљен као предлог наставне јединице за додатну наставу у III разреду гимназије, након обрађене области Аналитичка геометрија у равни.

Дефиниција тежишта

Једна од дефиниција тежишта је да је то тачка која се понаша као да је маса цијелог система сконцентрисана у њој [1]. Тачан положај тежишта је важно знати ако желимо да тијело буде у равнотежи.

Постоји много предмета чија маса није равномјерно распоређена (чекић, сјекира, човечије тијело, лоптица за бадминтон и сл). Положај тежишта зависи од распореда масе на тијелу и оно се увијек налази ближе оном дијелу на коме је сконцентрисана већа маса. Тежиште имају и геометријске фигуре и геометријска тијела и прорачун његовог положаја се користи у многим дисциплинама (физика, машинство, ...) [2].

Ако узмемо примјер клацкалице у чијој се крајњој тачки A налази маса од 3 kg, а у крајњој тачки B маса од 5 kg, онда за тачку T у којој треба поставити ослонац треба да важи $AT : TB = 5 : 3$.



Слика 1. Клацкалица у равнотежи

У општем случају, ако се у тачки A налази маса m_1, а у тачки B маса m_2, ослонац мора бити у тачки T таквој да је

$$AT : TB = m_1 : m_2, \quad m_1, m_2 \neq 0.$$

Векторски записано, важи

$$m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}.$$

Ова једначина се узима за математичку дефиницију тежишта.

Аналитички, ако имамо систем од n тачака са масама $m_1, \ldots, m_n$, редом, центар масе T тог система дефинишемо формулом

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{TA_i}.$$

Координате тачке T су у том случају

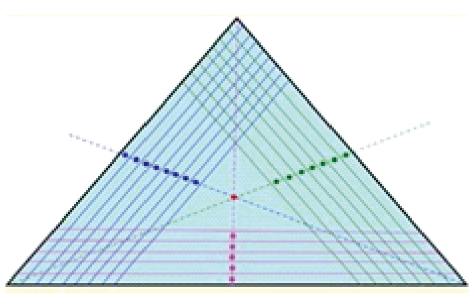
$$T = \frac{1}{M}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \sum_{i=1}^{n} m_i y_i\Big), \tag{1}$$

гдје је $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ збир маса свих тачака, а (x_i, y_i) њихове координате [3].

Напомена. Наведене формуле се односе на систем који се састоји од коначног броја тачака, али не и за тијела која су дио равни или простора а ограничена су задатим тачкама. Разлог је што маса таквих тијела није само у тјеменима, већ у цијелом тијелу. Формула је тачна за троугао, а начин одређивања тежишта за остала тијела биће приказан у примјерима који слиједе.

Методе одређивања тежишта

Метода конструкције базира се на чињеници да се тежиште танке траке налази у њеном средишту. На пример, хомогена плоча облика троугла подијели се у низ паралелних танких трака. Тежиште сваке траке је у њеном средишту. Права који спаја сва тежишта појединих трака је тежишна линија троугла. Тежиште троугла налази се у пресјеку добијених тежишних линија [2].



Слика 2. Метода конструкције

Тежиште хомогеног тијела правилног геометријског облика налази се у геометријском средишту тијела, па га можемо лако наћи. Ако је тијело неправилног облика, тежиште можемо наћи експериментално [4].

Експерименталним путем тежиште тијела се може одредити тако што се тијело објеси у једној тачки и остави да заузме равнотежни положај. Из услова равнотеже тијела је јасно да се тежиште мора налазити на вертикали кроз тачку вјешања. Када се тијело на исти начин објеси у некој другој тачки, онда ће се тежиште налазити у пресјеку прве и друге вертикале, које се могу исцртати на тијелу [5].

Уколико тијело поставимо у координатни систем, тежиште можемо одредити аналитичким путем. Користићемо помоћ софтверског пакета GeoGebra, како за илустрацију, тако и за израчунавање тачне позиције тежишта. Ако није другачије напоменуто, претпоставићемо да су тијела направљена од хомогеног материјала.

Одређивање тежишта тијела коришћењем софтверског пакета GeoGebra

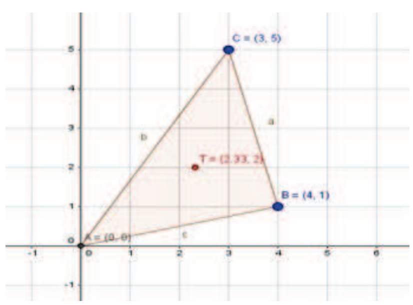
Примјер 1. Одредити тежиште троугла $A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(3,5)$.

Маса троугла M једнака је његовој површини, масе у тјеменима су $m = m_i = M/3$, $i = 1,2,3$, па је

$$T = \frac{1}{M}(m \cdot x_1 + m \cdot x_2 + m \cdot x_3,\, m \cdot y_1 + m \cdot y_2 + m \cdot y_3) = \Big(\frac{7}{3}, 2\Big),$$

гдје су (x_i, y_i), $i = 1,2,3$ координате тачака A, B и C. Тежиште је добијено директном примјеном формуле (1).

Исти резултат добија се ако искористимо аналитичку формулу за одређивање тежишта троугла.



Слика 3. Тежиште троугла

Примјер 2. Одредити тежиште четвороугла $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$, $D(2,6)$.

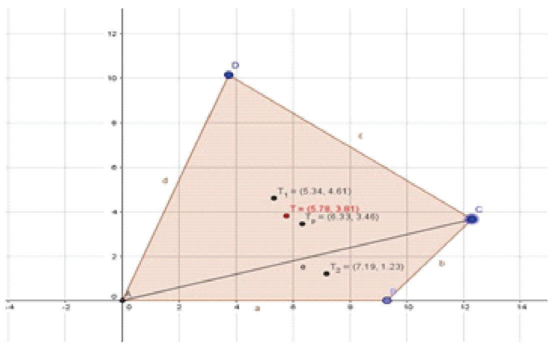
Центар масе троугла од хомогеног материјала се поклапа са центром масе троугла коме су једнаке масе сконцентрисане у тјеменима, тј. са тежиштем троугла. Међутим, како је већ напоменуто, центар масе произвољног хомогеног полигона НИЈЕ центар масе његових тјемена са једнаким масама [3].

Зато ћемо тежиште четвороугла (уопште, простог раванског полигона од хомогеног материјала чије су координате тјемена $A(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$ и $A_n = A_0$) тражити тако што га „разбијемо“ на троуглове. Центар масе добија се по формули

$$T = \frac{1}{M}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} m_i T_i\Big), \tag{2}$$

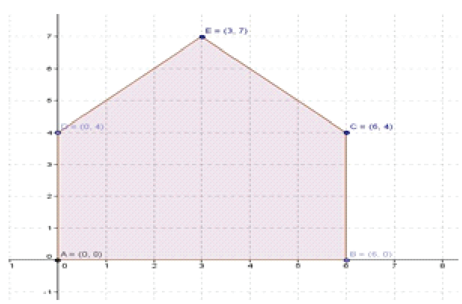
гдје су T_i тежишта добијених троуглова, а m_i њихове масе тј. површине [3].

На слици 4, T_1 и T_2 су тежишта троуглова ACD и ABD, редом, а T је тежиште четвороугла.



Слика 4. Тежиште четвороугла

Напомена. Тачка T_p, приказана на слици, добијена је примјеном формуле (1) на дати четвороугао, чиме се увјеравамо у тврдњу дату на почетку примјера ($T_p \neq T$).



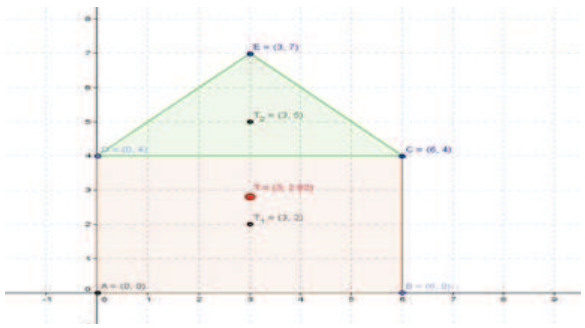
Слика 5. Петоугао којем треба одредити тежиште

Примјер 3. Одредити тежиште петоугла $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$, $E(3,7)$, $D(0,4)$.

Центар масе правоугаоника $ABCD$ је његов центар $T_1 = (3,2)$, а центар масе троугла CDE његово тежиште $T_2 = (3,5)$. Њихове масе једнаке су њиховим површинама тј. $m_1 = 24$ и $m_2 = 9$. Укупна маса M једнака је збиру ових маса, дакле 33. Ако искористимо формулу (2) и извршимо је у GeoGebri, добијамо

$$T = \frac{1}{33}(24T_1 + 9T_2) = \left(3, \frac{31}{11}\right).$$

У овом примјеру тежиште правоугаоника је његов центар симетрије, па смо искористили ту особину. У супротном, тежиште (произвољног) петоугла бисмо одредили као у примјеру 2.



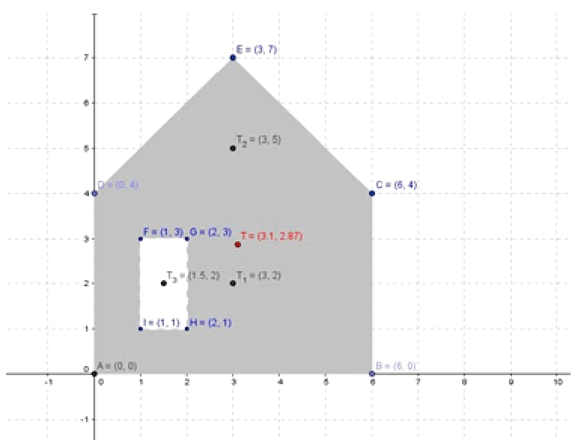
Слика 6. Тежиште петоугла

Примјећујемо да се тежиште петоугла налази на његовој оси симетрије.

Примјер 4. Наћи тежиште петоугла $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$, $E(3,7)$, $D(0,4)$, из ког је исјечен правоугаоник $F(1,3)$, $G(2,3)$, $H(2,1)$, $I(1,1)$.

Тежиште добијеног тијела пронаћи ћемо слично претходном примјеру, само што ћемо „масу“ исјеченог правоугаоника ($m = 2$), чије је тежиште тачка $T_3 = (\frac{3}{2}, 2)$, узети са предзнаком минус:

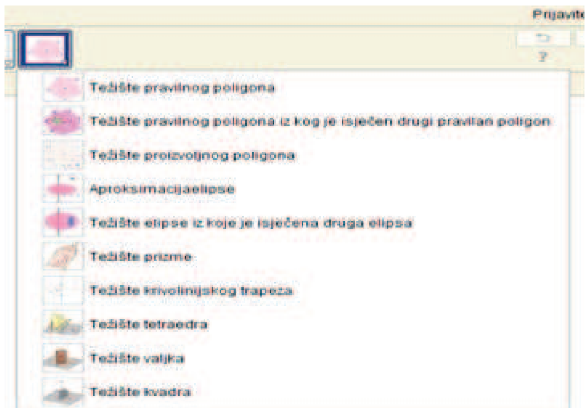
$$T = \frac{1}{33-2}(24T_1 + 9T_2 - 2T_3) = \left(\frac{96}{31}, \frac{89}{31}\right) = (3.1, 2.87)$$



Слика 7. Тежиште петоугла из ког је исјечен правоугаоник

Да би се у ово увјерили, ученици исти задатак могу решавати експриментал- ном методом – ако од картона направе петоугао истих димензија, нађу тежиште, затим исјеку правоугаоник, па опет нађу тежиште.

Помјерањем положаја исјеченог правоугаоника, примјећујемо промјену положаја тежишта петоугла. Тежиште се помјерило у десну страну јер је лијева постала лакша.



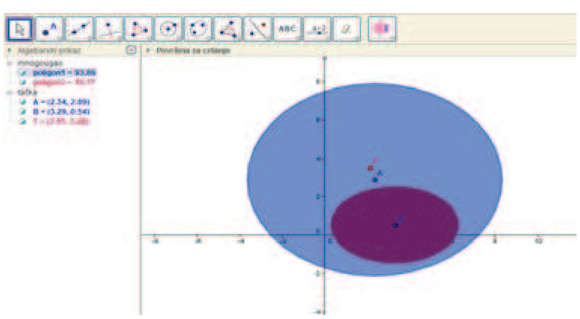
Слика 8. Могућности алатке за налажење система тачака у GeoGebri

Имајући у виду методе и аналитичке формуле за одређивање тежишта, а ради бољег увида и смањења обима рачуна, у GeoGebri је креирана алатка за одређивање тежишта неких система тачака. Алатка је осмишљена у складу са осталим алаткама и њом се могу добити тежишта система излистаних у менију.

Тежиште система тачака у наредним примјерима добијено је употребом ове алатке, чиме је уједно објашњен начин њеног коришћења.

Примјер 5. Наћи тежиште елипсе из које је исјечена друга елипса, ако су задате дужине полуоса.

Кликом на одговарајућу алатку, од корисника се тражи да унесе центре и дужине полуоса елипси, након чега се добија тежиште.



Слика 9. Тежиште елипсе из које је исјечена друга елипса

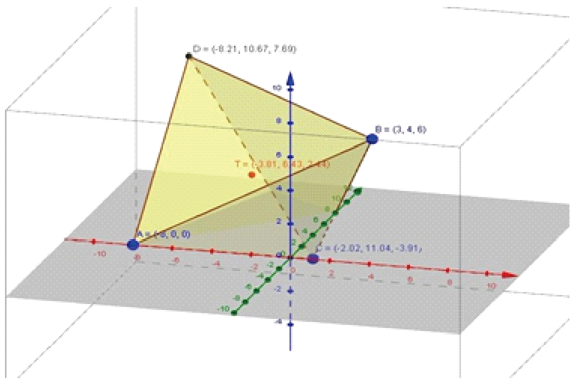
Поново, тијела можемо помјерати и мијењати им димензије, чиме се види и промјена положаја тежишта цјелокупног система, што је суштина приказа у GeoGebri. Алатка користи могућност апроксимације елипсе полигоном, након чега се, примјеном формуле (2) добије њено тежиште.

Примјер 6. Одредити тежиште тетраедра ако су дате координате његових тјемена у простору.

Тежиште тетраедра рачуна се по формули [6]:

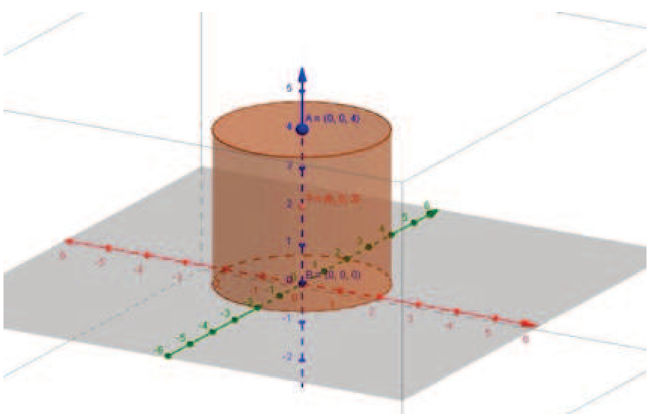
$$T = \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} y_i, \sum_{i=1}^{4} z_i\Big),$$

гдје су (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, 4$, координате тјемена тетраедра. Формула је коришћена при креирању алатке, тако да се кликом на њу тражи унос тјемена тетраедра, а као резултат добија тежиште.



Слика 10. Тежиште тетраедра

Примјер 7. Одредити тежиште ваљка задате висине и полупречника.

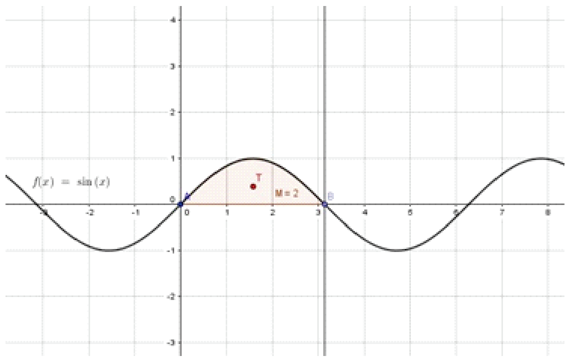


Слика 11. Тежиште ваљка

Како је ваљак централно симетрична фигура, тежиште се налази у центру симетрије. Креирана алатка користи ову особину ваљка како би одредила тежиште, имајући у виду улазне величине.

Примјер 8. Одредити тежиште криволинијског трапеза задатог краком чије су крајње тачке A и B на x-оси и графиком функције $f(x)$, која одређује други крак.

Кликом на алатку тражи се унос функције $f(x)$ и тачака A и B, након чега се добија тежиште.

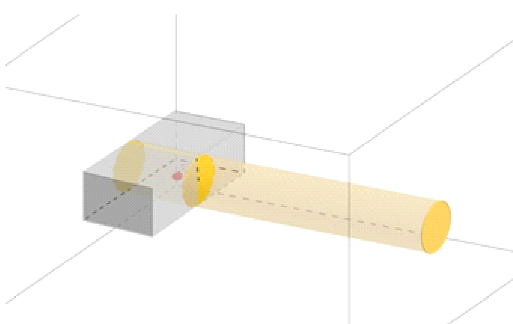


Слика 12. Тежиште криволинијског трапеза

Ако узмемо $f(x) = \sin(x)$, $A = (0,0)$ и $B = (\pi, 0)$, добијамо тежиште тијела приказаног на слици 12.

Задатке овог типа, на овом нивоу школовања, ученици могу решавати искључиво употребом алатке.

Примјер 9. Чекић је направљен од гвожђа облика квадра. Да би се у гвожђе усадила дршка, из њега је, почев од средине странице квадра највеће површине, исјечен ваљак одговарајућег пречника и висине. Дршка је од дрвета облика ваљка, одговарајућих димензија. Наћи тежиште чекића. (Узети да је густина гвожђа $7.8\,\mathrm{g/cm^3}$, а дрвета $0.7\,\mathrm{g/cm^3}$).



Слика 13. Тежиште чекића

Чекић посматрамо као сложен систем који се састоји од квадра из ког се „исијеца“ ваљак од истог материјала, да би се коначно „додао“ ваљак направљен од другог материјала. Чекић није направљен од хомогеног материјала па за масе не можемо узети запремине, већ их морамо израчунавати помоћу познате формуле из физике.

Нека су $m_1 = 7.8 \cdot V_1$ и T_1 маса и тежиште квадра израђеног од гвожђа, а $m_2 = 7.8 \cdot V_2$ и T_2 маса и тежиште ваљка исјеченог из квадра (претпоставља се да ученици знају да срећују димензије, па чемо то изоставити). Усађивањем дршке додајемо ваљак од дрвета чију ћемо масу и тежиште означити са $m_3 = 0.7 \cdot V_3$ и T_3.

Коначно, тежиште цијелог система рачунамо као

$$T = \frac{m_1 \cdot T_1 - m_2 \cdot T_2 + m_3 \cdot T_3}{m_1 - m_2 + m_3},$$

гдје смо тежишта T_1, T_2 и T_3 израчунали коришћењем одговарајуће алатке.

Закључак

Сврха рада је да се ученицима приближи ова важна област. Предлог да се област обради баш у III разреду гимназије је из разлога што се тада стичу услови за аналитичко решавање ове врсте проблема. Такође, предложено је да се тежиште, поред аналитичког метода решавања, илуструје помоћу GeoGebre. Могућности овог софтверсог пакета дозвољавају нам да направимо алат за одређивање тежишта, чиме се олакшава његово израчунавање у неким сложенијим системима. Примјерима је приказано гдје се налази тежиште неких тијела, као и шта се дешава са његовом позицијом ако се мијењају положаји тачака које тијело одређују, као и димензије и врсте материјала од којих је направљено. Крајњи циљ рада је да ученици стекну „осјећај“ о положају тежишта и тиме испуне неке предуслове за решавање сличних проблема из других области.

ЛИТЕРАТУРА

[1] https://sh.wikipedia.org/wiki/Težište (5.12.2015.)

[2] http://eskola.hfd.hr/hokus_pokus/ravnoteza/3ss_teziste.htm (5.12.2015.)

[3] T. Šukilović, S. Vukmirović, *Geometrija za informatičare*, Matematički fakultet, Beograd, 2015.

[4] Vernić, Liščić, Šindler, *Fizika 1 za srednje škole*, Školska knjiga, Zagreb, 1980.

[5] V. M. Vučić, D. M. Ivanović, *Fizika I*, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

[6] Brennan Wade, *Phenomenal Three-Dimensional Objects*, A thesis submitted to the Graduate Faculty of Auburn, Alabama. May 9, 2011, dostupno na: https://etd.auburn.edu/bitstream/handle/10415/2492/brennanthesis2.pdf?sequence=2 (17.12.2015.)

[7] A. Ruina, R. Pratap, *Introduction to STATICS and DYNAMICS*, Oxford University Press (Preprint), 2011.

[8] www.geogebra.org

Математички факултет, Београд

E-mail: pd132006@alas.matf.bg.ac.rs