ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Душан Ј. Симјановић, Ненад О. Весић

ПИТАМ СЕ ПИТАМ 2016 ПУТА

Овај чланак настоји да, пратећи идеју радова [7, 8], а позивајући се на идеје, резултате и задатке из радова [2–4, 6, 9, 10] и књиге [5], настави са приказивањем занимљивих математичких проблема у којима фигурише број текуће године. Сама идеја је да се, на неки начин, прикажу различите могућности решавања математичких задатака као и да се подстакне на размишљање о сродним проблемима дељивости и решавања једначина.

Задатак 1. На колико је нееквивалентних начина број 2016 могуће представити као збир кубова природних бројева чији је производ једнак 2016? На колико нееквивалентних начина је број 2016 могуће представити као збир четвртих степена природних бројева чији је производ једнак 2016?

Следећа представљања $\underset{1}{\pi} = (\underset{1}{\pi}_1, \dots, \underset{1}{\pi}_n)$ и $\underset{2}{\pi} = (\underset{2}{\pi}_1, \dots, \underset{2}{\pi}_n)$ броја $\pi \in \mathbb{N}$:

$$\pi = \underset{1}{\pi}_1 \cdot \ldots \cdot \underset{1}{\pi}_n = \underset{2}{\pi}_1 \cdot \ldots \cdot \underset{2}{\pi}_n$$

сматрају се еквивалентним ако постоји бијективно пресликавање $f : \underset{1}{\pi} \to \underset{2}{\pi}$.

Решење. Нека је

$$x_1^3 + \cdots + x_k^3 = 2016, \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}.$$

Како је $\sqrt[3]{2016} \approx 12{,}6327$, то следи да су сви чиниоци броја 2016, који су делови збирова облика (1), мањи или једнаки 12.

Број 2016, у факторисаном облику, представља се по правилу

$$2016 = 2^{5-u} \cdot 2^u \cdot 3^{2-v} \cdot 3^v \cdot 7,$$

где је $u = 0, 1, \dots, 5$, $v = 0, 1, 2$. Број u у претходној једнакости има особину да је у представљању броја 2016 као производа тачно u чинилаца једнаких 2. Одатле следи да су све факторизације броја 2016 на чиниоце веће од 1 и мање или једнаке 12 представљене у следећим једнакостима:

$$
\begin{aligned}
2016 &\overset{u=0}{=} 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 9\\
&\overset{u=1}{=} 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\\
&\overset{u=2}{=} 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 7 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 7\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 6\cdot 6\cdot 7\\
&\quad = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 12\\
&\overset{u=3}{=} 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 8 = 2\cdot 2\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 = 2\cdot 2\cdot 6\cdot 7\cdot 12\\
&\overset{u=4}{=} 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 7 = 2\cdot 4\cdot 4\cdot 7\cdot 9 = 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 12\\
&\quad = 2\cdot 7\cdot 12\cdot 12\\
&\overset{u=5}{=} 3\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 8 = 3\cdot 7\cdot 8\cdot 12 = 4\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 6\cdot 6\cdot 7\cdot 8.
\end{aligned}
$$

Притом је

$$12^3 + 7^3 = 2071 > 2016.$$

С обзиром на то да $7 \mid 2016$, следи да нити једно од претходних растављања броја 2016 на чиниоце које у себи садржи број 12 није растављање које одговара првом питању у овом задатку. Размотримо остале могућности.

1. Случај $u = 0$. Постоје две могућности:

1.1. $2016 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$.

Како је

$$2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + 7^3 = 437,$$

то следи да је решење задатка у овом случају, због

$$
\begin{aligned}
2016 &= \underbrace{1\cdot \ldots \cdot 1}_{1579\ \text{пута}} \cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7,\\
2016 &= \underbrace{1^3 + \ldots + 1^3}_{1579\ \text{пута}} + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + 7^3,
\end{aligned}
$$

уређена 1587-орка $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1579\ \text{пута}}, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 7)$.

1.2. $2016 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 9$.

С обзиром на то да је

$$
\begin{aligned}
2016 &= \underbrace{1\cdot \ldots \cdot 1}_{904\ \text{пута}} \cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 9,\\
2016 &= \underbrace{1^3 + \ldots + 1^3}_{904\ \text{пута}} + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 7^3 + 9^3,
\end{aligned}
$$

следи да је одговарајуће представљање, у овом случају,
$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{904\ \text{пута}}, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 9)$.

2. $u = 1$. Једна могућност постоји у овом случају и то

2.1. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7$.

С обзиром на то да важи једнакост

$$2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 6^3 + 7^3 = 618,$$

и како важе једнакости

$$2016 = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{1398 \text{ пута}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7,$$
$$2016 = \underbrace{1^3 + \ldots + 1^3}_{1398 \text{ пута}} + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 6^3 + 7^3,$$

следи да је, у овом случају, одговарајуће представљање $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1398 \text{ пута}}, 2, 2, 2, 2, 3, 6, 7)$.

3. $u = 2$. У овом случају следеће су могућности:

3.1. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$.

С обзиром на то да је

$$2^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + 4^3 + 7^3 = 485,$$

и још

$$2016 = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{1531 \text{ пута}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7,$$
$$2016 = \underbrace{1^3 + \ldots + 1^3}_{1531 \text{ пута}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7,$$

то следи да је $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1531 \text{ пута}}, 2, 2, 2, 3, 3, 7)$ одговарајуће представљање у овом случају.

3.2. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9$.

Аналогно претходном, у овом случају важи

$$2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3 + 9^3 = 1160,$$
$$2016 = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot}_{856 \text{ пута}} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9,$$
$$2016 = \underbrace{1^3 + \ldots + 1^3}_{856 \text{ пута}} + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3 + 9^3,$$

па је уређена 862-јка $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{856 \text{ пута}}, 2, 2, 2, 4, 7, 9)$ тражено представљање у овом случају.

3.3. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7.$

Као и претходно, важи да је

$$2^3 + 2^3 + 2^3 + 6^3 + 6^3 + 7^3 = 799,$$
$$2016 = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{1217 \text{ пута}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7,$$
$$2016 = \underbrace{1^3 + \ldots + 1^3}_{1217 \text{ пута}} + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 6^3 + 6^3 + 7^3,$$

па је тражено представљање могуће извршити помоћу бројева $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1217 \text{ пута}}, 2, 2, 2, 6, 6, 7)$.

4. $u = 3$. Наредне факторизације броја 2016, због одговарајућих чинилаца мањих од 12, могуће су у овом случају:

4.1. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8.$

Аналогно претходним разматрањима долази се до закључка да је представљање броја 2016 помоћу бројева $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1091 \text{ пута}}, 2, 2, 3, 3, 7, 8)$ тражено представљање у овом случају.

4.2. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9.$

Понављањем претходног поступка долази се до закључка да је, у овом случају, тражено решење $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{416 \text{ пута}}, 2, 2, 7, 8, 9)$.

4.3. $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7.$

Користећи претходни поступак, лако је доћи до закључка да је одговарајуће представљање могуће учинити помоћу бројева $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1350 \text{ пута}}, 2, 2, 3, 4, 6, 7)$.

5. $u = 4$. У овом случају следеће су могућности:

5.1. $2016 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7.$

Одговарајуће представљање, у овом случају, је помоћу бројева $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1483 \text{ пута}}, 2, 3, 3, 4, 4, 7)$.

5.2. $2016 = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9.$

У овом случају, уређена n-торка сачињена од одговарајућег растављања је $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{1483 \text{ пута}}, 2, 3, 3, 4, 4, 7)$.

5.3. $2016 = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8.$

Бројеви којима се постиже тражено растављање су $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{910 \text{ пута}}, 2, 3, 6, 7, 8)$.

6. $u = 5$.

6.1. $2016 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8$.

Одговарајући бројеви су $(\underbrace{1, \dots, 1}_{1043 \text{ пута}}, 3, 3, 4, 7, 8)$.

6.2. $2016 = 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

Одговарајући бројеви су $(\underbrace{1, \dots, 1}_{368 \text{ пута}}, 4, 7, 8, 9)$.

6.3. $2016 = 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

Одговарајући бројеви су $(\underbrace{1, \dots, 1}_{729 \text{ пута}}, 6, 6, 7, 8)$.

Одговор на прво питање у задатку јесте да таквих представљања има укупно 15.

Што се другог питања у задатку тиче, како је $7^4 = 2401 > 2016$ и како $7|2016$, следи да таквих представљања нема. $\triangle$

Задатак 2. Дат је природан број

$$n_{2016} = 1 + 2016^1 + 2016^2 + \cdots + 2016^{2016}$$

Одредити последње две цифре броја n_{2016}.

Решење. С обзиром на то да се у задатку траже последње две цифре броја n_{2016}, јасно је да је потребно одредити природан број C_{2016}, највише двоцифрен, такав да је

$$n_{2016} \equiv_{100} C_{2016}.$$

Најпре, важи

$$n_{2016} \equiv_{100} 1 + 16^1 + 16^2 + \cdots + 16^{2016} \quad (= \tilde{n}_{2016}). \tag{1}$$

Још важи и

$$16^1 \equiv_{100} 16, \;\; 16^2 \equiv_{100} 56, \;\; 16^3 \equiv_{100} 96, \;\; 16^4 \equiv_{100} 36, \;\; 16^5 \equiv_{100} 76, \;\; 16^6 \equiv_{100} 16. \tag{2}$$

Из једнакости (2) јасно следи да је збир (1) могуће разврстати заградама у дисјунктне класе на следећи начин:

- Нулту класу чини број $1^{2016} = 1$.
- K-ту, $K = 1, \dots, 403$, од наредне 403 класе чини збир
$$16^{5(K-1)+1} + 16^{5(K-1)+2} + 16^{5(K-1)+3} + 16^{5(K-1)+4} + 16^{5K}.$$
- Четиристо четврту класу чини број 16^{2016}.

Јасно је да су последње две цифре броја у нултој класи 01. Такође, на основу једнакости (2), следи да су последње две цифре броја у произвољној од K класа, $K = 1, \dots, 403$, једнаке последњим двема цифрама збира

$$16 + 16^2 + 16^3 + 16^4 + 16^5,$$

односно 80. Из једнакости (1) следи да су последње две цифре сабирка 16^{2016} заправо 16. На основу свега тога следи да је

$$n_{2016} \equiv_{100} 1 + 403 \cdot 80 + 16,$$

па је двоцифрени завршетак броја n_{2016} једнак 57. $\triangle$

Задатак 3. Дат је природан број

$$\mathcal{N} = \overline{c_{Np}c_{Np-1}\dots c_{N1}c_{N-1\,6}\dots c_{N-1\,1}\dots c_{1\,6}\dots c_{1\,1}},$$

записан у декадном бројном систему цифрама $c_{i\,j}$ при чему је $p \le 6$. Ако су $n_k = \overline{c_{k\,6}\dots c_{k\,1}}$, $k = 1,\dots,N$, природни бројеви чијим надовезивањем се добија број $\mathcal{N}$, одредити остатак разлике

$$\mathcal{N} - n_1 - 64(n_2 + \cdots + n_N)$$

при дељењу са 2016.

Решење. Важи

(3)

$$\begin{aligned}
&10^0 \equiv_{2016} 1, \quad 10^1 \equiv_{2016} 10, \quad 10^2 \equiv_{2016} 100, 10^3 \equiv_{2016} 1000, 10^4 \equiv_{2016} 1936,\\
&10^5 \equiv_{2016} 1216, \ 10^6 \equiv_{2016} 64, \quad 10^7 \equiv_{2016} 640, 10^8 \equiv_{2016} 352, \ 10^9 \equiv_{2016} 1504,\\
&10^{10} \equiv_{2016} 928, \ 10^{11} \equiv_{2016} 1216, 10^{12} \equiv_{2016} 64.
\end{aligned}$$

С обзиром да је

$$\mathcal{N} = n_1 + 10^6 n_2 + 10^{2\cdot 6} n_3 + \cdots + 10^{(N-1)\cdot 6} n_N,$$

то на основу једнакости (3) јасно следи да је број $\mathcal{N} - n_1 - 64\big(n_2 + \cdots + n_N\big)$ дељив са 2016, тј. да је тражени остатак једнак 0. $\triangle$

Задатак 4. Нека је n природан број. Добро су познати услови дељивости са 2^k, са 3^k, са 11. Одредити одговарајући услов, сличан тим условима, дељивости са 2016.

Решење. Број 2016, у растављеној форми, има облик $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Нека је цифарски запис броја n

$$n = \overline{c_{1\,1}c_{1\,2}c_{1\,3}c_{2\,1}\dots c_{N\,1}c_{N\,2}c_{N\,3}},$$

где су $c_{i\,j}$ декадне цифре од којих цифре $c_{1\,1}$ и $c_{1\,2}$ могу имати вредност 0, али је у сваком случају једна од три цифре $c_{1\,1}, c_{1\,2}, c_{1\,3}$ различита од 0.

Важи

$$10^0 \equiv_7 1, \quad 10^1 \equiv_7 3, \quad 10^2 \equiv_7 2, \quad 10^3 \equiv_7 -1. \tag{4}$$

Нека је $n_k = \overline{c_{k\,1}c_{k\,2}c_{k\,3}}$. Јасно је да је

$$n = n_N + 10^3 n_{N-1} + \cdots + 10^{3N} n_N.$$

Из конгруенција (4) јасно следи да је

$$n \equiv_7 n_N - n_{N-1} + n_{N-2} - \cdots + (-1)^N n_1.$$

Одавде пак следи да је број n дељив са 7 ако и само ако је број $r = n_N - n_{N-1} + \dots$ дељив са 7.

На овај начин доказано је да је остатак броја n при дељењу са 7 једнак остатку броја r при дељењу са 7.

Коначно, *број n дељив је са* 2016 *ако и само ако је његов петоцифрени завршетак дељив са* 32*, збир цифара дељив са* 9 *и претходно дефинисани број r дељив са* 7.

Треба још имати на уму да је, у општем случају, троцифрен број $m = \overline{c_1c_2c_3}$ – чије су декадне цифре c_1, c_2, c_3 – дељив са 7 ако и само ако је број $\overline{c_1c_2} - 2c_3$ дељив са 7. △

Задатак 5. Колико једначина

$$(x+y)^2\big(x^2+y^2\big) = 2016 \tag{5}$$

има решења у скупу природних бројева? Колико та једначина има решења у скупу целих бројева?

Решење. Уређени пар $(0,0)$ није решење ове једначине. На оба питања, постављена у задатку, одговор ће бити дат одједном. Како су x и y цели бројеви то следи да

$$(x+y)^2 \mid 2016 \quad \text{и} \quad (x^2+y^2) \mid 2016.$$

Из тог разлога, а како је $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ то је

$$(x+y)^2 \in \{1, 2^2, 2^4, 3^2, 2^2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^2\}.$$

Пре тога, познато је да је

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy. \tag{6}$$

Како су бројеви $x+y$ и x^2+y^2 исте парности, а број 2016 је паран, то следи да се скуп могућих вредности израза $(x+y)^2$ своди на $\{2^2, 2^4, 2^2 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^2\}$. Сада треба размотрити ове случајеве:

1. Случај $(x+y)^2 = 2^2$.

У овом случају важи $x^2 + y^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$, односно, из једнакости (6), следи да је $xy = -250$. Како у скупу целих бројева, важи да је $(x+y) \in \{2, -2\}$ то значи да су евентуална решења x и y једначине (5) заправо решења једне од квадратних једначина (Вијетове формуле)

$$t^2 + 2t - 250 = 0 \quad \text{или} \quad t^2 - 2t - 250 = 0.$$

Дискриминанте тих једначина су 1004, а како $\sqrt{1004} \notin \mathbb{Z}$, то једначина (5) нема решења у скупу целих бројева у овом случају.

2. Случај $(x+y)^2 = 2^4$.

У овом случају, аналогно претходним разматрањима, добија се да је $x^2 + y^2 = 126$ одакле је $xy = -55$ па су одговарајуће квадратне једначине (Вијетове формуле)

$$t^2 + 4t - 55 = 0 \quad \text{и} \quad t^2 - 4t - 55 = 0,$$

чије су дискриминанте једнаке 236 па, како $\sqrt{236} \notin \mathbb{Z}$, следи да ни у овом случају једначина (5) нема решења у скупу целих бројева.

3. Случај $(x+y)^2 = 2^2 \cdot 3^2$.

У овом случају је $x^2 + y^2 = 56$ па је $xy = -10$ па, како је $(x+y) \in \{6, -6\}$, следи да су x и y корени неке од квадратних једначина (Вијетове формуле)

$$t^2 + 6t - 10 = 0 \quad \text{или} \quad t^2 - 6t - 10 = 0.$$

Дискриминанте ових једначина су 76 па, како важи $\sqrt{76} \notin \mathbb{Z}$, то посматрана једначина нема решења у скупу целих бројева ни у овом случају.

4. Случај $(x+y)^2 = 2^4 \cdot 3^2$.

Аналогно претходним разматрањима, долази се до закључка да је $(x+y) \in \{12, -12\}$, $x^2+y^2 = 14, xy = -65$, односно да су x и y решења једначина (Вијетове формуле)

$$t^2 + 12t - 65 = 0 \quad \text{и} \quad t^2 - 12t - 65 = 0.$$

Ни ове једначине немају решења у скупу целих бројева па се долази до закључка да једначина (5) нема решења у скупу $\mathbb{Z}$, па самим тим ни у скупу $\mathbb{N}$. △

Задатак 6. Колико једначина

$$2\int_0^x e^{\sin(2016t)}dt = \frac{1}{2016}e^{\sin(2016x)} - 1, \tag{7}$$

има решења у скупу реалних бројева?

Решење. Интеграл на левој страни ове једначине није једноставно израчунати. Због тога ћемо применити метод приказан у раду [10]. Нека је

$$F(x) = 2\int_0^x e^{\sin(2016t)}dt - \frac{1}{2016}e^{\sin(2016x)} + 1$$

одговарајућа функција. Сваки реалан број x_0 решење је једначине (7) ако и само ако је $F(x_0) = 0$.

Први извод функције $F(x)$ задовољава услов

$$F'(x) = 2e^{\sin(2016x)} - \cos(2016x)e^{\sin(2016x)} = e^{\sin(2016x)}(2 - \cos(2016x)) > 0,$$

одакле следи да је функција F строго растућа. То значи да та функција не може имати више од једне нуле.

Како је $F(0) = 0$, то значи да је $x_0 = 0$ једино решење једначине (7). △

Задатак 7. Која су решења система једначина

$$\begin{cases} nx_1 = x_2x_3 = \cdots = x_{2014}x_{2015} = mx_{2016} \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \cdots = x_{2015} + x_{2016} \end{cases} \tag{8}$$

по $x_1, \ldots, x_{2016}$ у скупу $(0, +\infty)$ где су m и n произвољни позитивни реални бројеви?

Решење. Нека је $(x_1, \dots, x_{2016})$ произвољно решење система (8). Ако је $x_1 > m$ онда је, због $nx_1 = mx_{2016}$, $x_{2016} > n$. Поред тога, како је $x_1 + x_2 = m + n$, важи $x_2 < n$.

Како је $nx_1 = x_2 x_3$, а због $x_2 < n$, важи да је $x_3 > m$. Одатле, а из чињенице да је $x_3 + x_4 = m + n$, следи да је $x_4 < n$. Настављањем овог поступка долази се до закључка да је $x_{2016} < n$ што је контрадикција са претходним закључком да је $x_{2016} > n$.

Аналогним поступком, долази се до контрадикције у вези са претпоставком $x_1 < m$. Због тога је $x_1 = m$ одакле директно следи да је

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \cdots = x_{2015} = m, \\ x_2 = x_4 = \cdots = x_{2016} = n, \end{cases}$$

једино решење система (8). △

Задатак 8. Одредити све тројке (x, y, z) реалних бројева које задовољавају систем једначина

$$\begin{cases} x + y + z = 2016 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8064^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2016}. \end{cases} \tag{9}$$

Решење. Из прве две једначине система (9) добија се да је

$$xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = -\frac{15}{2} \cdot 2016^2. \tag{10}$$

Из треће једначине система (9), а на основу релације (10), добија се да је

$$xyz = -\frac{15}{2} \cdot 2016^3. \tag{11}$$

Коришћењем прве једначине система (9) и резултата (10), (11), а на основу Вијетових формула, следи да су x, y, z нуле полинома

$$p(t) = t^3 - 2016t^2 - \frac{15}{2} \cdot 2016^2 + \frac{15}{2} \cdot 2016^3.$$

У факторизованом облику, полином $p(t)$ има облик

$$p(t) = (t - 2016)\Big(t - 2016\sqrt{\frac{15}{2}}\Big)\Big(t + 2016\sqrt{\frac{15}{2}}\Big),$$

одакле јасно следи да су решења система (9) све пермутације уређене тројке $(2016, 2016\sqrt{\frac{15}{2}}, -2016\sqrt{\frac{15}{2}})$. △

Задатак 9. Цар Хијерон имао је 2016 златника. Међу њима се налази један лажни златник (лакши је од осталих златника). Цар је задао задатак Архимеду да у најкраћем могућем року тачно одреди који је златиник лажан.

Архимед је, на располагању, имао теразије које само одређују који је тас тежи, односно лакши. Те теразије су веома осетљиве па им треба пет секунди да покажу који је тас тежи. На који начин, и за које време, ће Архимед са сигурношћу да одреди који је златник лажни?

Решење. У случају да Архимед на располагању има једне теразије он би требало да 2016 златника разврста на три једнаке гомиле са по 672 златника. Даље ће му бити потребно 7 мерења.

1. Архимед, за пет секунди, утврђује која је од произвољне две од претходне три гомиле лакша. Ако су једнаких маса изабране гомиле лажни златник је у трећој.
2. Претходно одређену гомилу, у којој се налази лажни златник, Архимед треба да подели на три једнаке са по 224 златника. На исти начин као у претходном мерењу он утврђује у којој је, од три гомиле са по 224 златника, лакши златник након пет секунди.
3. У гомилу од 224 златника Архимед додаје још један од правих златника за које зна да су прави на основу претходних мерења. Гомила, са лажним златником, има 225 златника након тог додавања. Архимед ту гомилу дели на три гомиле са по 75 златника и, након пет секунди, утврђује претходним поступком у којој је од те три гомиле лажни златник.
4. Архимед гомилу, са 75 златника у којој је лажни златник, дели на три мање гомиле са по 25 златника. Претходно приказаним поступком, након пет секунди, утврђује на којој је од тих мањих гомила лажни златник.
5. У гомилу са 25 златника, у којој је лажни златник, Архимед додаје два права златника добијена претходним мерењима. Након тога, ту гомилу са 27 златника дели на три гомиле са по 9 златника. Након пет секунди утврђује у којој је гомили лакши златник претходно коришћеним методом.
6. Гомилу са 9 златника, у којој је лажни златник, Архимед дели на три гомиле са по три златника. Након пет секунди, он опет утврђује у којој је од тих гомила лажнизлатник.
7. Гомилу са три златника, у којој је лажни златник, Архимед дели на три гомиле са по једним златником и, након пет секунди – претходно употребљеним методом - проналази лажни златник.

Укупно време је, у овом случају, 35 секунди. $\triangle$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, Математички факултет, Београд, 2004.

[2] В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, *Припремни задаци за математичка такмичеа средошколаца у Србији*, Материјали за младе математичаре, свеска 49, 2-го изд, ДМС, Београд 2011.

[3] Ђ. Баралић, *300 припремних задатака за јуниорске математичке олимпијаде: искуство Србије*, Клет, Београд 2014.

[4] С. Б. Бранковић, *Збирка решених задатака из математике за средње школе, одабрана поглавља*, Завод за уџбенике, Београд, 2007.

[5] З. Каделбург, П. Младеновић, *Савезна такмичеа из математике*, Материјали за младе математичаре, свеска 23, ДМС, Београд 1990.

[6] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре, свеска 15, 5. изд, ДМС, Београд, 2013.

[7] Д. Ј. Симјановић, Н. О. Весић, *Занимљиви алгебарски задаци са бројем 2012*, Настава математике, LVII, 1-2 (2012), 45–51.

[8] Д. Ј. Симјановић, Н. О. Весић, *Број 2014 у алгебарским задацима*, Настава математике, LVIII, 1-2 (2013), 53–60.

[9] *Тангента 10*, Збирка задатака објављених у рубрици „Задаци из математике“ часописа *Тангента* 1995–2005. године, Материјали за младе математичаре, свеска 45, ДМС, Београд 2006.

[10] Н. О. Весић, Д. Ј. Симјановић, *Још један приступ решавању једначина у скупу реалних бројева*, Настава математике, LVI, 3-4 (2011), 18–22.

Д.Ј.С.: Природно-математички факултет у Нишу, Гимназија „Светозар Марковић“, Ниш

E-mail: `dsimce@gmail.com`

Н.О.В.: Природно-математички факултет у Нишу, Пројекат 174012 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

ОБАВЕШТЕЊЕ

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА“

Међународно такмичење „Кенгур без граница“ одржано је, свуда у Европи па и код нас, 17. марта 2016. године. У Србији је учествовало око 33 000 ученика од 1. разреда основне до 4. разреда средње школе. Резултати такмичења су објављени на сајту

`http://imi.pmf.kg.ac.rs/kengur/`

Награде најуспешнијим такмичарима ће бити уручене на посебно заказаним свечаностима.