Др Соња Чукић

УПАРИВАЊЕ У КОМБИНАТОРНИМ ДОКАЗИМА

1. Увод

Једном давно краљ земље зване Комбинаторика[1] позвао је све племиће и племкиње да присуствују балу поводом 18. рођендана своје кћерке. Када су се сви окупили у његовом огромном двору, краљ је наредио да се одреди да ли у краљевству има више племића или племкиња. После неколико неуспелих покушаја да изброје колико има мушкараца и колико има жена, краљев саветник се досетио да пусте музику и да краљ нареди свакоме ко може да нађе слободну особу супротног пола, да са њом заплеше. После неког времена на двору ће бити парови који плешу, и уколико постоји мушкарац који не плеше, онда има више племића. У супротном на двору има више племкиња.

Ова идеја *упаривања* често се користи у комбинаторици када желимо да сазнамо који скуп има више елемената или када желимо проблем да преведемо на неки други проблем који је лакше описати и схватити. У следећим поглављима бавићемо се већином применама ове идеје, али пре тога да се подсетимо неких основних чињеница које ћемо користити у тим примерима.

(*i*) Нека су A и B коначни скупови. Уколико постоји 1-1 функција $f : A \to B$, тада је број елемената скупа A мањи или једнак броју елемената скупа B, тј. $|A| \leqslant |B|$.

(*ii*) Нека су A и B коначни скупови. Уколико постоји бијекција $f : A \to B$, тада је број елемената скупа A једнак броју елемената скупа B, тј. $|A| = |B|$.

(*iii*) Функција $f : A \to B$ је бијекција ако и само ако има инверз, тј. ако постоји функција $g : B \to A$ тако да за сваки елемент $a \in A$ важи $g(f(a)) = a$ и за сваки $b \in B$ важи $f(g(b)) = b$.

2. Основни примери

Почећемо једним једноставним примером, чији резултат ћемо често користити у даљем тексту.

Пример 2.1. Колико има бинарних низова дужине n, где је n произвољан природан број? Бинарни низ је низ у коме се појављују само нуле и јединице. Општије, колико има низова дужине n над азбуком (скупом) од k слова?

[1] Реч ***комбинаторика*** се први пут појавила у Лајбницовом делу Dissertatio de Arte Combinatoria.

Решење. Низ дужине n ћемо представљати као уређену n-торку:

$$(\underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \dots, \_\_, \_\_, \_\_}_{n \text{ места}}).$$

На сваком од n места можемо написати или нулу или јединицу, тако да је број бинарних низова дужине n једнак 2^n. Користећи ову идеју, лако се види да је одговор на општије питање постављено у задатку управо k^n. $\triangle$

Пример 2.2. Нека је A коначан скуп, $|A| = n$. Доказати да је број свих подскупова скупа A једнак 2^n.

Примедба. По аналогији са овом резултатом, партитивни скуп скупа A се у комбинаторици често означава са 2^A.

Решење. Уколико је $n = 0$, једини подскуп празног скупа је празан скуп, па тврђење важи јер је $2^0 = 1$.

Ако је $n \geqslant 1$, приметимо да је 2^n број бинарних низова дужине n, тако да ћемо конструисати бијекцију између скупа свих оваквих низова и партитивног скупа скупа A. Ради лакшег означавања, нека је $A = \{1, 2, \dots, n\} = [n]$.

Ако је $\mathrm{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ произвољан бинарни низ дужине n, конструишимо скуп $S_\mathrm{b} \subseteq A$ на следећи начин: за $i \in [n]$, $i \in S_\mathrm{b}$ ако и само ако је $b_i = 1$. Директно се види да је пресликавање $f : \mathrm{b} \longmapsto S_\mathrm{b}$ тражена бијекција. $\triangle$

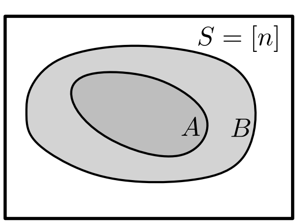
Пример 2.3. Нека је A непразан коначан скуп, $|A| = n$. Доказати да је број свих подскупова скупа A који имају непаран број елемената једнак 2^{n-1}. Другим речима, број подскупова скупа A са парним бројем елемената једнак је броју подскупова са непарним бројем елемената, при чему је празан скуп скуп са парним бројем елемената.

Решење. Означимо са $\mathcal{F}$ фамилију свих подскупова скупа $A = [n]$ који имају непаран број елемената и конструишимо пресликавање

$$f : 2^{[n-1]} \to \mathcal{F} \ ([0] = \varnothing), \quad f(A) = \begin{cases} A, & |A| \text{ је непаран број;} \\ A \cup \{n\}, & |A| \text{ је паран број.} \end{cases}$$

Лако се провери да је f добро дефинисано пресликавање које је бијекција. Тиме смо доказали тврђење, тј. да је $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$. $\triangle$

Пример 2.4. Дат је скуп S који има n елемената. Одредити број уређених парова (A, B), где су $A, B \subseteq S$, тако да важи $A \subseteq B$. Шта се у примеру мења ако захтевамо још и да је $A \neq B$?



Сл. 1

Решење. Као и у претходним примерима, ради лакшег означавања, нека је $S = [n]$. Дефинишимо функцију f која пар скупова (A, B) за који важе услови примера пресликава у низ дужине n над скупом $[3]$, $\mathrm{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, на следећи начин: за сваки $s \in [n]$,

(1) ако $s \in S \setminus (A \cup B)$, онда $b_s = 1$;

(2) ако $s \in B \setminus A$, онда $b_s = 2$;

(3) ако $s \in A$, онда $b_s = 3$.

Како су скупови A, $B \setminus A$, $S \setminus (A \cup B)$ дисјунктни у паровима и унија им је цео скуп S, f је добро дефинисана функција. Докажимо да је f бијекција тако што ћемо конструисати инверзно пресликавање, да бисмо илустровали примену чињенице (iii).

Нека је $\mathrm{c} = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ произвољан низ дужине n над скупом $[3]$. Нека је $A = \{s \in [n] \mid c_s = 3\}$, $B = A \cup \{s \in [n] \mid c_s = 2\}$ и дефинишимо функцију g, $g : \mathrm{c} \mapsto (A, B)$. Лако се проверава да је $f \circ g = \mathrm{id}$ и $g \circ f = \mathrm{id}$ на одговарајућим скуповима. Добијамо да је решење задатка управо број свих низова дужине n над скупом $[3]$, тј. 3^n.

Уколико захтевамо да је $A \neq B$, онда од 3^n морамо да одузмемо све случајеве када је $A = B$, тј. број свих низова дужине n над скупом $\{1, 3\}$. Дакле, решење примера, када додамо услов да скуп A мора бити прави подскуп скупа B, јесте $3^n - 2^n$. $\triangle$

Пример 2.5. Дат је скуп S који има n елемената. На колико различитих начина се може изабрати пар (A, B) подскупова скупа S тако да је њихова унија S? Шта се у задатку мења када, уместо да тражимо број оваквих парова (A, B), тражимо број скупова $\{A, B\}$ чија је унија цео скуп S?

Решење. Конструишимо функцију f која пар скупова (A, B), таквих да $S = [n] = A \cup B$, пресликава у низ $\mathrm{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ дужине n над скупом $[3]$ на следећи начин: за сваки $s \in [n]$,

(1) ако $s \in A \setminus B$, онда $b_s = 1$;

(2) ако $s \in B \setminus A$, онда $b_s = 2$;

(3) ако $s \in A \cap B$, онда $b_s = 3$.

Означимо са $\mathcal{F}$ фамилију свих парова скупова (A, B), таквих да је $A \cup B = [n]$. Као и у претходном примеру, лако се проверава да је f бијекција између $\mathcal{F}$ и свих низова дужине n над скупом $[3]$, тј. одговор на прво питање је 3^n.

Да бисмо дали одговор на друго питање из примера, приметимо да нам овде редослед избора скупова није важан. Искористићемо први део примера. Означимо са $\mathcal{G}$ фамилију свих скупова $\{A, B\}$, таквих да је $A \cup B = [n]$, и нека је g функција, $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $g : (A, B) \mapsto \{A, B\}$. Ако је $A \neq B$, тада $|g^{-1}(\{A, B\})| = 2$, а ако је $A = B$, онда, због услова да је $A \cup B = [n]$, мора бити $A = [n]$. Дакле,

$$|\mathcal{G}| = \frac{1}{2}\left(|\mathcal{F}| + 1\right) = \frac{1}{2}\left(3^n + 1\right). \quad \triangle$$

Примедба. Идеју са краја претходног задатка можемо формалније да запишемо. Наиме, ако су A и B коначни скупови између којих постоји НА функција $f : A \to B$ таква да је за неки природан број m и за сваки елемент $b \in B$, $|f^{-1}(b)| = m$, онда је $|A| = m \cdot |B|$.

Доказ. Тврђење следи из чињенице да скупови $f^{-1}(b)$, $b \in B$, чине партицију скупа A на подскупове од којих сваки има тачно m елемената. $\square$

3. Биномни коефицијенти

Да бисмо наставили са примерима који користе идеју упаривања, морамо прво да се подсетимо неких важних ствари везаних за биномне коефицијенте и да се подсетимо неких идентитета, које ћемо доказивати комбинаторно, уместо давања стандардних алгебарских доказа. Такође, да бисмо илустровали лепоту комбинаторног доказа, урадићемо више примера него што нам је потребно за даљи текст.

Дефиниција. Нека је n природан, а k ненегативан цео број. Дефинишимо *биномни коефицијент* $\binom{n}{k}$ као број свих k-точланих подскупова скупа $[n]$.

По аналогији са ознаком за биномни коефицијент, са $\binom{[n]}{k}$ ћемо означавати скуп свих k-точланих подскупова скупа $[n]$.

Лема 3.1. (а) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;

(б) Ако је $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$;

(в) За свако $0 \leqslant k \leqslant n$ важи $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Доказ. Делови (а) и (б) следе директно из дефиниције. Да бисмо доказали својство (в), приметимо да је функција f која слика неки k-точлани подскуп $A \subseteq [n]$ у његов комплемент $[n] \setminus A$ заправо бијекција између $\binom{[n]}{k}$ и $\binom{[n]}{n-k}$. $\square$

Последица. Нека је n природан број. Тада важи:

(а) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, (б) $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.

Доказ. Следи из дефиниције биномних коефицијената и примера 2.2 и 2.3. $\square$

Лема 3.2. За природан број n и ненегативан цео број k важи

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Доказ. Доказаћемо да су лева и десна страна једнакости исте тако што ћемо показати да оба представљају број елемената истог скупа.

Десна страна: број $(k+1)$-точланих подскупова скупа $[n+1]$.

Лева страна: ако је $S \subseteq [n+1]$, такав да је $|S| = k+1$, тада:

- ако $n+1 \notin S$, онда је $S \subseteq [n]$, а таквих подскупова има $\binom{n}{k+1}$,
- ако $n+1 \in S$, онда $S \setminus \{n+1\} \subseteq [n]$, а таквих подскупова има $\binom{n}{k}$.

Како сваки подскуп или садржи или не садржи неки елемент, добили смо да је лева страна једнакости једнака десној. $\square$

Лема 3.3. Нека су k и n природни бројеви. Тада важи

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Доказ. Десна страна: број свих $(k+1)$-точланих подскупова скупа $[n+1]$.

Лева страна. Нека је $S \subseteq [n+1]$, такав да је $|S| = k+1$. Тада је максимум скупа S, $\max S$, елемент скупа $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$. Ако је $j = \max S$, онда је $S \setminus \{j\}$ неки k-точлани поскуп скупа $[j-1]$, а таквих подскупова има $\binom{j-1}{k}$. Добијамо

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k+1}^{n+1} \left| \left\{ S \in \binom{[n+1]}{k+1} \;\middle|\; \max S = j \right\} \right| = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}. \quad \square$$

За крај овог поглавља доказаћемо један тежи идентитет, за који свакако није нимало једноставно дати алгебарски доказ.

Пример 3.1. Нека је n природан број и $0 \leqslant k \leqslant n-1$ цео број. Тада важи

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} 2^j.$$

Решење. Лева страна: број свих подскупова скупа $[n]$ који имају *највише* k елемената.

Десна страна. Ако је S подскуп од $[n]$ са највише k елемената, онда $[n] \setminus S$ мора да има бар $\ell = n-k$ елемената, тј.

$$[n] \setminus S = \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell, \ldots, a_s\},\ 1 \leqslant a_1 < \cdots < a_s \leqslant n,\ s \geqslant \ell.$$

Прво приметимо да a_ℓ може бити било који елемент скупа $B_\ell = \{\ell, \ell+1, \ldots, n\}$. Ако фиксирамо елемент $f \in B_\ell$, питамо се колико има скупова $S \subseteq [n]$ са највише k елемената тако да је ℓ-ти елемент по величини у скупу $[n] \setminus S$ баш f, тј. тако да је $a_\ell = f$, користећи ознаке одозго. Како f мора бити ℓ-ти елемент по величини, из скупа $[f-1]$ морамо изабрати $\ell - 1$ елемент на $\binom{f-1}{\ell-1}$ начина. Што се тиче елемената већих од f, они могу или да припадају или да не припадају скупу $[n] \setminus S$, јер чим смо изабрали ℓ елемената за скуп $[n] \setminus S$, имамо $|S| = n - |[n] \setminus S| \leqslant n - \ell = k$. Закључујемо да скуп $([n] \setminus S) \cap \{f+1, f+2, \ldots, n\}$ може бити произвољан подскуп скупа B_{f+1}, а њих има 2^{n-f}. Коначно, скупова $S \subseteq [n]$, $|S| \leqslant k$, тако да је ℓ-ти елемент по величини у скупу $[n] \setminus S$ једнак f има $\binom{f-1}{\ell-1} \cdot 2^{n-f}$. Следи да је број свих подскупова са највише k елемената једнак

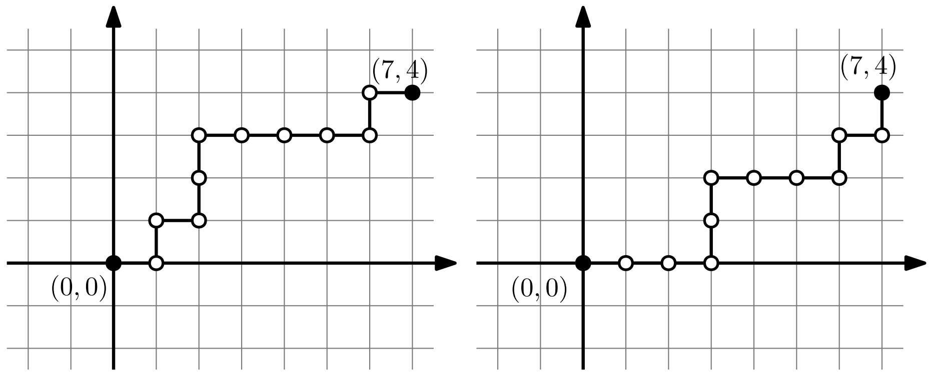
$$\begin{aligned}
\sum_{f=\ell}^{n} \binom{f-1}{\ell-1} \cdot 2^{n-f} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{\ell+k-j-1}{\ell-1} \cdot 2^{n-(\ell+k-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j-1}{n-k-1} \cdot 2^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j-1}{k-j} \cdot 2^j.
\end{aligned}$$

Овим смо показали да и лева и десна страна једнакости представљају број елемената истог скупа, тј. дати изрази су међусобно једнаки. $\triangle$

4. Пут по решетки

Дефиниција. *Север-исток пут по решетки* (С-И пут) је путања у $\mathbb{Z}^2$ која користи само кораке $S = (0,1)$ и $I = (1,0)$.

Примери С-И путева су дати на слици 2.



Сл. 2. Два примера С-И пута од $(0,0)$ до $(7,4)$

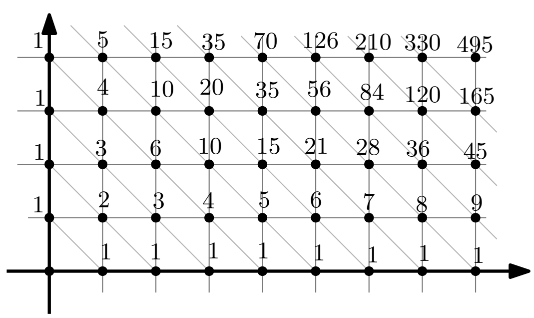
Пример 4.1. Нека су n и m произвољни ненегативни цели бројеви. Колико има С-И путева од тачке $(0,0)$ до тачке (n,m)?

Решење. Лако се види да сваки С-И пут од $(0,0)$ до (n,m) мора да има тачно $n+m$ корака, од којих n на исток и m на север. Сваки пут је јединствено одређен избором у којим корацима идемо на исток. Како од $n+m$ корака морамо да изаберемо n, тражени број С-И путева је $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$. △

Примедба. Резултат претходног примера смо могли да докажемо користећи својства биномних коефицијената. Наиме, у тачку (n,m) се може доћи или из тачке $(n-1,m)$ или из $(n,m-1)$, па је број С-И путева $(0,0) \to (n,m)$ једнак збиру броја С-И путева $(0,0) \to (n-1,m)$ и $(0,0) \to (n,m-1)$. Како важи

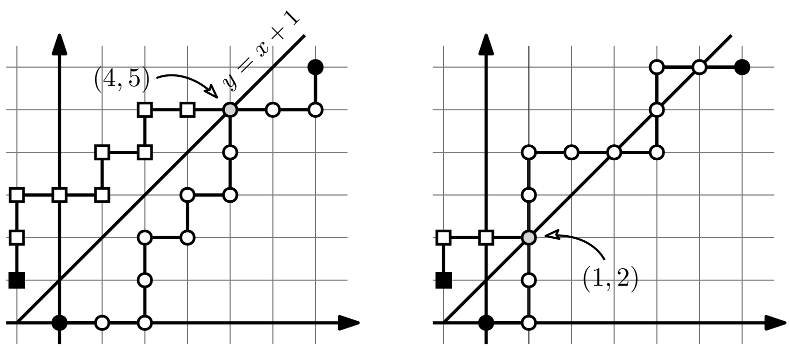
$$\binom{n+m-1}{n-1} + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n},$$

добили смо резултат примера (видети слику 3).



Сл. 3. Поред сваког чвора v написан је број С-И путева од $(0,0) \to v$. Ово је верзија Паскаловог троугла.

Пример 4.2. Нека је n неки природан број. Колико има С-И путева од $(0,0)$ до (n,n) који немају пресека са отвореном полуравни задатом неједначином $y > x$?



Сл. 4. Два лоша пута $(0,0) \to (6,6)$ и одговарајући путеви $(-1,1) \to (6,6)$

Решење. Назовимо С-И пут $(0,0) \to (n,n)$ *лошим* ако има пресек са датом полуравни $y > x$. Како знамо укупан број С-И путева $(0,0) \to (n,n)$, остаје да нађемо колико их има који су лоши. Да бисмо то урадили, направићемо одређену бијекцију. Наиме, сваки лош пут има пресек са правом $y = x+1$. Нека је тачка $(i, i+1)$ прва таква пресечна тачка. Тада део пута од $(0,0)$ до $(i, i+1)$ пресликамо симетрично у односу на праву $y = x+1$, а остатак пута оставимо какав је био (видети слику 4).

Како сваки лош пут мора да пресече праву $y = x+1$, видимо да на овај начин за сваки лош пут конструишемо тачно један пут $(-1,1) \to (n,n)$. Обратно, сваки пут $(-1,1) \to (n,n)$ мора да пресече праву $y = x+1$ јер су почетна и крајња тачка пута у различитим полуравнима одређеним овом правом. Изаберемо прву тачку пресека, и део од $(-1,1)$ до те тачке пресликамо симетрично у односу на $y = x+1$. На овај начин добијамо тачно један лош пут $(0,0) \to (n,n)$.

Другим речима, ова конструкција је бијекција између лоших путева $(0,0) \to (n,n)$ и свих С-И путева $(-1,1) \to (n,n)$, којих има $\binom{2n}{n+1}$, исто као путева $(0,0) \to (n+1, n-1)$. Коначно, решење задатка је

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}. \quad \triangle$$

Дефиниција. Број $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ назива се *n-ти Каталанов*[2] *број.*

Каталанови бројеви су од велике важности у комбинаторици. Овде ћемо навести само неке од проблема у којима се појављују ови бројеви.

[2] Eugène Charles Catalan (1814–1894), белгијски математичар

- Имамо n копија броја 1 и n копија броја -1. На колико начина можемо ове бројеве поређати у низ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{2n}$, тако да за свако $1 \leqslant j \leqslant 2n$ важи $\sum_{i=1}^{j} s_i \geqslant 0$?
- Колико има n-торки природних бројева $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ таквих да важи $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$ и $a_i \leqslant i$, за свако $i \in [n]$?
- Дато је $2n$ различитих тачака на хоризонталној правој. На колико начина можемо по две тачке повезати луковима изнад тачака, тако да се никоја два лука међусобно не секу? Ово је потпуно исто као да питамо колико има израза са n парова добро упарених заграда.
- *Проблем руковања*: $2n$ људи седи за округлим столом. На колико начина они сви истовремено могу да се рукују да другом особом која је за столом, а да се ничије руке не укрсте?
- Број планарних дрвета са кореном и са $(n+1)$-ним теменом је C_n.
- Број триангулација конвексног $(n+2)$-тоугла је C_n.

5. Такмичарски задаци

У овом поглављу ћемо урадити три такмичарска задатка који користе идеју упаривања.

Пример 5.1. [Математички вишебој, Москва, 2014]

У једној школи има по 200 вредних и 200 лењих ђака. На новогодишњу прославу Деда Мраз је донео кесу са 800 чоколада и хоће да их подели ђацима тако да сваки лењи ђак добије највише по једну чоколаду, а да сваки вредан ђак добије паран број чоколада, најмање по 2. Директор школе је решио да награди вредне ђаке тако што ће да им подели 600 мандарина, тако да сваки вредан ђак добије најмање по једну. Ко од њих двојице може на више начина да дистрибуира поклоне и колико пута више?

Решење. Докажимо да обојица имају исти број начина да поделе поклоне.

Број начина да Деда Мраз подели поклоне једнак је броју уређених 400-торки целих бројева $(l_1, l_2, \dots, l_{200}, 2v_1, 2v_2, \dots, 2v_{200})$, при чему важи $l_1 + l_2 + \dots + l_{200} + 2v_1 + 2v_2 + \dots + 2v_{200} = 800$ и за свако $j \in [200]$, $0 \leqslant l_j \leqslant 1$, $v_j \geqslant 1$.

Број начина да директор подели мандарине је број уређених 200-торки природних бројева $(m_1, m_2, \dots, m_{200})$, за које важи $m_1 + m_2 + \dots + m_{200} = 600$.

Сваки природан број n на јединствен начин може да се напише као $n = 2q + r$, где је q неки ненегативан цео број, а $r \in \{0, 1\}$ остатак при дељењу броја n са 2. Лако се види да је функција $f : n \mapsto (q, r)$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \{0, 1\}$ бијекција.

Нека је $\mathrm{m} = (m_1, m_2, \dots, m_{200})$ произвољна подела мандарина која задовољава услове и нека је, за свако $j \in [200]$, $f(m_j + 1) = (v_j, l_j)$. Важно је да приметимо да, како је $m_j + 1 \geqslant 2$, то је $v_j \geqslant 1$. На овај начин од m добијамо вектор $\mathrm{d} = (l_1, l_2, \dots, l_{200}, 2v_1, 2v_2, \dots, 2v_{200})$ који је добра расподела поклона за Деда Мраза: оно што једино још треба доказати је

$$l_1 + l_2 + \dots + l_{200} + 2(v_1 + \dots + v_{200}) = (m_1 + 1) + (m_2 + 1) + \dots + (m_{200} + 1) = 800.$$

Из чињенице да је f бијекција директно следи да је $g : \mathrm{m} \mapsto \mathrm{d}$ такође бијекција, тј. Деда Мраз и директор имају исти број начина да расподеле поклоне. $\triangle$

Пример 5.2. [Америчка математичка олимпијада, 1996]

Нека је a_n број бинарних низова дужине n који немају три узастопна члана једнака $0, 1, 0$. Нека је b_n број бинарних низова исте дужине који не садрже, као четири узастопна члана, низове $0, 0, 1, 1$ и $1, 1, 0, 0$. Доказати да је за сваки природан број n, $b_{n+1} = 2a_n$.

Решење. Нека је $\mathrm{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n+1})$ произвољан бинарни низ дужине $n+1$ који не садржи $0, 0, 1, 1$ и $1, 1, 0, 0$. Конструишимо функцију f,

$$f(\mathrm{b}) = (|b_2 - b_1|, |b_3 - b_2|, , \ldots, |b_{n+1} - b_n|).$$

Добили смо бинарни низ дужине n који не садржи $0, 1, 0$. Такође, за сваки низ дужине n који не садржи $0, 1, 0$, $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, постоје тачно два различита низа $\mathrm{b}', \mathrm{b}''$ дужине $n+1$ који не садрже $0, 0, 1, 1$ и $1, 1, 0, 0$ и такви да је $f(\mathrm{b}') = f(\mathrm{b}'') = \mathrm{a}$. Наиме, то су низови

$$\mathrm{b}' = (1 = b'_1, b'_2, b'_3, \ldots, b'_{n+1}),\ \text{за } i \in [n],\ b'_{i+1} = \begin{cases} b'_i, & a_i = 0, \\ 1 - b'_i, & a_i = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{b}'' = (0 = b''_1, b''_2, b''_3, \ldots, b''_{n+1}),\ \text{за } i \in [n],\ b''_{i+1} = \begin{cases} b''_i, & a_i = 0, \\ 1 - b''_i, & a_i = 1. \end{cases}$$

На основу примедбе на крају поглавља 2, закључујемо оно што се у задатку и тражи, да је $b_{n+1} = 2a_n$. $\triangle$

Пример 5.3. [Путнам такмичење, 2005]

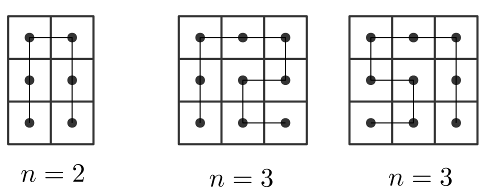
Дат је скуп $S = \{(a, b) \mid a \in [n],\ b \in [3]\}$. *Топовски обилазак* скупа S је полигонална линија састављена од дужи које повезују тачке $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{3m}$ редом тако да је:

(i) $p_i \in S$ за свако $i \in [3n]$;

(ii) растојање између p_i и p_{i+1} је једнако 1, за свако $i \in [3n - 1]$;

(iii) за сваки елемент p скупа S постоји тачно једно i, $i \in [3n]$, тако да је $p_i = p$.

Колико има топовских обилазака скупа S који почињу у $(1, 1)$ и завршавају се у $(n, 1)$?

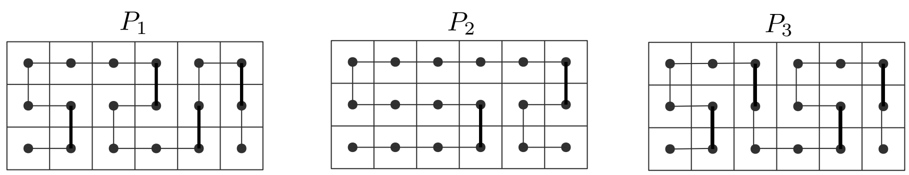


Сл. 5. Сви тражени топовски обиласци за $n = 2, 3$

Решење. Скуп S можемо да посматрамо као таблу $n \times 3$. Приметимо да, када стигнемо у неко поље у доњој врсти, из њега не можемо да идемо на лево, само на десно и на горе, јер обилазак не сме да има самопресецања. Слично, из поља у горњој врсти можемо само на десно и на доле. Како сваки обилазак који оде горе мора и да се врати у доњу врсту, издвојићемо она поља када из доње врсте или горње врсте обилазак пређе у средњу врсту.

Формално речено, ако је P неки топовски обилазак скупа S, и ако са $(i,k) \to (j,l) \in P$ означимо да су парови (i,k) и (j,l), тим редом, два узастопна члана обиласка P, нека је

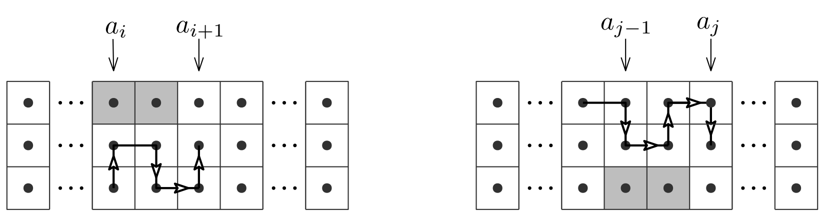
$$\sigma(P) = \{i \in [n] \mid (i,1) \to (i,2) \in P \text{ или } (i,3) \to (i,2) \in P\}\,.$$



$\sigma(P_1) = \{2,4,5,6\}$ $\sigma(P_2) = \{4,6\}$ $\sigma(P_3) = \{2,3,5,6\}$

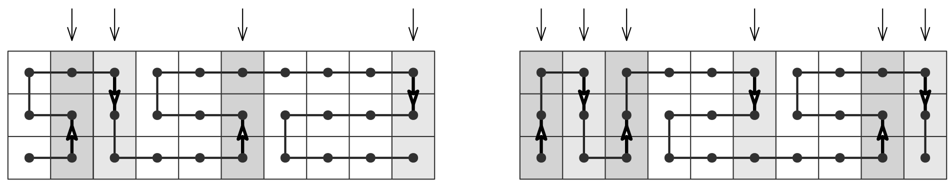
Сл. 6. Обиласци P_1, P_2 и P_3 и одговарајући скупови

Како из поља $(n,3)$ можемо само на доле, закључујемо да је увек $n \in \sigma(P)$. Приметимо да, у примерима нацртаним на сликама 5 и 6, $\sigma(P)$ увек садржи паран број елемената. Докажимо да је то увек случај. Наиме, нека је $\sigma(P) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, при чему је $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Ако, за неко i, a_i одговара делу обиласка $(a_i,1) \to (a_i,2)$, онда a_{i+1} мора да одговара делу $(a_{i+1},3) \to (a_{i+1},2)$. Важи и обрнуто, ако за неко j, a_j одговара делу обиласка $(a_j,3) \to (a_j,2)$, онда a_{j-1} мора да одговара делу $(a_{j-1},1) \to (a_{j-1},2)$, видети слику 7, јер иначе не бисмо могли да обиђемо нека поља у доњој или у горњој врсти. Такође, ако $(i,1) \to (i,2) \in P$ и $(j,3) \to (j,2) \in P$, онда мора бити $i \neq j$. Овим смо доказали да је $|\sigma(P)|$ увек паран број.



Сл. 7. Ако би a_i и a_{i+1} оба одговарали „пењању“ или оба „силаску“, одређена поља не бисмо могли да обиђемо.

Да бисмо доказали да је σ бијекција између свих топовских обилазака скупа S и свих поскупова $A \subset [n]$ таквих да је $n \in A$ и $|A| \in 2\mathbb{N}$, конструишимо инверзно пресликавање. Нека је $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2k}\}$, при чему је $1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2k} = n$.



$A_1 = \{\underline{2}, \overline{3}, \underline{6}, \overline{10}\}$ $A_2 = \{\underline{1}, \overline{2}, \underline{3}, \overline{6}, \underline{9}, \overline{10}\}$

Сл. 8. Подскупови скупа [10] са парним бројем елемената и одговарајући обиласци

Као на слици 8, конструишимо топовски обилазак P_A тако да у P_A буду сви:

$$\begin{array}{ccccc} (a_1, 2) & (a_2, 3) & & (a_{2k-1}, 2) & (n, 3) \\ \uparrow & \downarrow & \dots & \uparrow & \downarrow \\ (a_1, 1), & (a_2, 2), & & (a_{2k-1}, 1), & (n, 2). \end{array}$$

Остатак „попуњавамо“ онако како морамо, с тим да корак у леву страну увек има предност над кораком горе или кораком доле.

Овим смо доказали да је број топовских обилазака скупа S исти као број подскупова скупа $[n-1]$ са непарним бројем елемената, што је једнако 2^{n-2}. $\triangle$

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Matoušek and J. Nešetřil, *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford University Press, USA, 2008.

[2] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics 1*, Cambridge University Press, USA, 2002.

[3] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, USA, 1968.

[4] M. Bóna, *A Walk Through Combinatorics*, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.

[5] Yao Zhang, *Combinatorial Problems in Mathematical Competitions*, World Scientific Publishing, Singapore, 2011.

[6] `http://artofproblemsolving.com/`

Математичка гимназија, Краљице Наталије 37, Београд

E-mail: `sonja.cukic@mg.edu.rs`