Др Владимир Мићић

ОРИЈЕНТАЦИЈА У КООРДИНАТНОЈ РАВНИ. ПОВРШИНА ТРОУГЛА

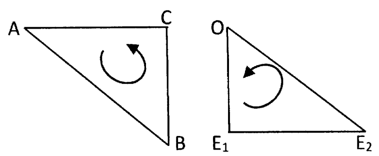
Мој (неодржани) час у Математичкој гимназији

Пре педесет година нашао сам се у групи привилегованих младих наставника, којима је поверено остваривање наставе из математичких предмета у тада тек основаној Математичкој гимназији у Београду. О узбуђењима и другим утисцима из тог периода нећемо овом приликом. Било је то време без рачунара и мобилних телефона, па сам, као и већина нас, припреме за часове и друге активности бележио у одговарајуће свешчице плавих или наранџастих корица. Имао сам и посебну свеску у коју сам записивао своје или туђе идеје, ове друге често налажене у тада доступној математичкој литератури (по правилу на руском језику), које су ми се чиниле занимљивим и подесним за рад с ученицима. Разумљиво је да сам, учествујући у припремама за обележавање значајног јубилеја Математичке гимназије, прелиставао своје старе свеске и књиге, које су ме подсећале и на њене почетке и на њено успешно полувековно трајање. У поменутој посебној свесци наишао сам на кратак запис: Моденов, АГ, 1969, стр. 30, трећи разред? Уз мало напора нашао сам књигу која је ту поменута, у њој на цедуљицама скицу часа који бих, можда, могао одржати у трећем разреду и „филм ми се одмотао“.

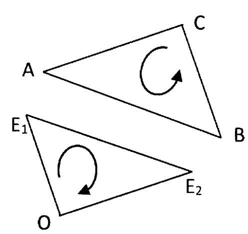
У петнаестогодишњем периоду предавао сам предмете Анализа с алгебром (у другом, трећем или четвртом разреду), Специјални курс са семинаром (теорија бројева, неједнакости), Геометрија, Нацртна геометрија, али ми је предмет Линеарна алгебра и аналитичка геометрија „измицао“; а желео сам да се огледам и у тим садржајима. Кад сам, почетком седамдесетих година прошлог века, купио књигу: П. С. Моденов, *Аналитическая геометрия*, Москва 1969, био сам сигуран да она може послужити као добра основа за реализацију програма. Припремао сам материјале, скицирао часове и чекао прилику; и нисам је дочекао. Свестан сам да су наставни програми и њихова реализација значајно осавремењени и да овај садржај у данашњем тренутку може деловати превазиђено. Данас би се, вероватно, ту нашли појмови линеарног векторског простора, његове базе, векторског производа вектора и сл. Ипак, да би се сачувао дух минулог времена, у даљем ћу дословно преписати ту своју скицу једног часа. Читаоци ће је, ако се одлуче да је употребе у наставној пракси, без тешкоћа употпунити до праве припреме, а верујем да ће и ученици на тако реализованом часу понешто научити.

Дефиниција 1. Уређену тројку неколинеарних тачака (A, B, C) називамо *оријентисаним троуглом.* Уређену тројку колинеарних тачака називамо *дегенерисаним троуглом.* Троугаону фигуру у равни, одређену том тројком тачака, означавамо са $\triangle(A, B, C)$.

Користећи се интуитивно прихватљивим појмом посматрања изабране стране равни можемо говорити о оријентацији троугла у смеру супротном од смера кретања казаљке на часовнику или у смеру кретања казаљке на часовнику. Претпостављамо да је познат појам површине фигуре F у равни, означаваћемо је са $P(F)$, и његова основна својства и да је изабрана јединица мере за дужину, а тиме и јединица мере за површину. Напоменимо и да је површина сваког дегенерисаног троугла једнака нули.



Слика 1



Слика 2

Дефиниција 2. Раван у којој је изабран и фиксиран оријентисани троугао $\triangle(O, E_1, E_2)$ називамо њиме *оријентисаном равни.* Тај основни троугао $\triangle(O, E_1, E_2)$ сматрамо *позитивно оријентисаним*; сваки троугао у тој равни који је с њим једнако оријентисан називамо позитивно оријентисаним троуглом а сваки троугао у тој равни који је у односу на њега супротно оријентисан називамо *негативно оријентисаним.* Помоћу таквог оријентисаног троугла уведимо координатни систем у тој равни, чији је координатни почетак у тачки O, тачка E_1 припада оси Ox и дуж OE_1 је јединична дуж осе Ox, док тачка E_2 припада оси Oy и дуж OE_2 је јединична дуж осе Oy – тај систем називамо *општи Декартов координатни систем* у тој равни; означавамо га и са (O, x, y). Ако су дужи OE_1 и OE_2 једнаке дужине и међусобно нормалне, тај ћемо систем назвати *Декартов правоугли координатни систем.*

Дефиниција 3. Оријентисаном површином троугаоне фигуре $\triangle(A, B, C)$ у оријентисаној равни, означавамо је са $P_o(\triangle(A, B, C))$, називамо број чија је апсолутна вредност једнака површини тог троугла и који је позитиван ако је троугао позитивно оријентисан а негативан ако је троугао негативно оријентисан.

Јасно је да се цикличном пермутацијом темена оријентација троугла не мења и да се пермутацијом која није циклична оријентација троугла мења. Због тога је

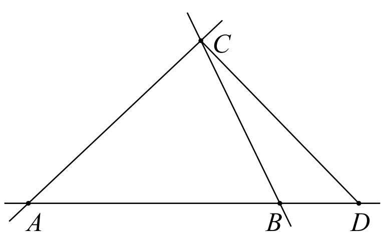
$$\begin{aligned} P_o(\triangle(A, B, C)) &= P_o(\triangle(B, C, A)) = P_o(\triangle(C, A, B)) \\ &= -P_o(\triangle(B, A, C)) = -P_o(\triangle(A, C, B)) = -P_o(\triangle(C, B, A)). \end{aligned}$$

С друге стране, очигледно је да оријентисана површина дате троугаоне фигуре (троугла) не зависи од изабраног основног троугла у њеној равни, него само од положаја темена троугла и оријентације основног троугла. Због тога можемо бирати подесни основни троугао, па ћемо се определити за Декартов правоугли координатни систем.

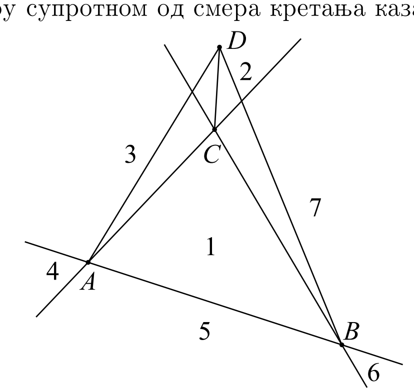
Теорема 1. *Нека је раван π оријентисана тако што је у њу уведен Декартов правоугли координатни систем. За произвољне четири тачке A, B, C, D равни π важи*

$$P_o(\triangle(A,B,C)) = P_o(\triangle(A,B,D)) + P_o(\triangle(B,C,D)) + P_o(\triangle(C,A,D)). \tag{1}$$

Скица доказа. Ако све четири тачке припадају једној правој, сви су троуглови који се појављују дегенерисани, сви су бројеви који се појављују у једнакости (1) једнаки нули, па је једнакост тачна. Не нарушавајући општост расуђивања претпоставимо да тачке A, B, C нису колинеарне и да је $\triangle(A,B,C)$ позитивно оријентисан. Одређености ради определили смо се да основни троугао (O, E_1, E_2), а тиме и троугао (A, B, C), буде оријентисан тако да се, посматран са изабране стране равни π, обилази у смеру супротном од смера кретања казаљке на часовнику.



Слика 3



Слика 4

Ако тачка D припада некој од страница $\triangle(A,B,C)$ или њиховим продужецима (има девет таквих случајева), тада међу посматране четири тачке постоји тројка колинеарних тачака, један од троуглова је дегенерисан и ситуација је једноставна. Илустроваћемо то случајем кад је D колинеарна са A и B, при чему је B између A и D (слика 3); тада је $P_o(\triangle(A,B,D)) = 0$, $\triangle(B,C,D)$ је негативно а $\triangle(C,A,D)$ позитивно оријентисан. Због тога имамо да је $P_o(\triangle(B,C,D)) = -P(\triangle(B,C,D))$ и $P_o(\triangle(C,A,D)) = P(\triangle(C,A,D))$. Будући да је („види се са слике“) $P(\triangle(A,B,C)) = P(\triangle(C,A,D)) - P(\triangle(B,C,D))$ и $P(\triangle(A,B,C)) = P_o(\triangle(A,B,C))$, коначно налазимо

$$P(\triangle(A,B,C)) = P_o(\triangle(A,B,C)) = 0 + P_o(\triangle(S,A,D)) - (-P(\triangle(B,C,D)),$$

одакле следи $P_o(\triangle(A,B,C)) = P_o(\triangle(A,B,D)) + P_o(\triangle(B,C,D)) + P_o(\triangle(C,A,D))$, па једнакост (1) важи у овом случају. На сличан начин се уверавамо да она важи у осталих осам случајева.

Ако тачка D не припада ниједној од три праве којима припадају странице троугла (A,B,C), онда она припада једној од седам области у равни, на које ту раван деле поменуте три праве; нумерисали смо их на слици 4. У случају 1° сва четири троугла су позитивно оријентисана, њихове су оријентисане површине једнаке њиховим површинама и једноставно се „са слике“ уверавамо да је једнакост (1) испуњена. Доказаћемо тачност нашег тврђења у случају 2°; у случајевима 4° и 6° доказ је аналоган, а у случајевима 3°, 5° и 7° мало се разликује. У случају 2° оријентација троуглова (A,B,C) и (A,B,D) је позитивна, а оријентација троуглова (B,C,D) и (C,A,D) је негативна. Са слике видимо да је $P(\triangle(A,B,C)) = P(\triangle(A,B,D)) - P(\triangle(B,C,D)) - P(\triangle(C,A,D))$, одакле налазимо да је $P_o(\triangle(A,B,C)) = P_o(\triangle(A,B,D)) - (-P_o(\triangle(B,C,D))) - (-P_o(\triangle(C,A,D))) = P_o(\triangle(A,B,D)) + P_o(\triangle(B,C,D)) + P_o(\triangle(C,A,D))$, што је требало доказати. ■

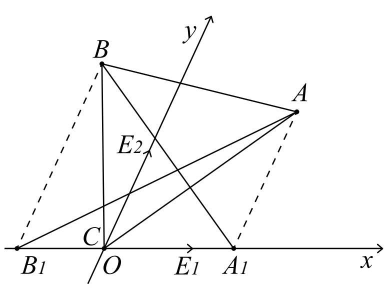
Теорема 2. *Нека је у раван π уведен општи Декартов координатни систем и изабрана јединица дужине, па тиме и јединица површине. Претпоставимо да су темена (недегенерисаног) троугла (A,B,C) задата својим координатама $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ и нека је S_0 површина основног троугла (O,E_1,E_2) тог координатног система (мерена задатом јединицом). Онда је*

$$P_o(\triangle(A,B,C)) = S_0 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Скица доказа. Претпоставимо да се теме C поклапа с координатним почетком а темена A и B припадају, редом, осама Ox и Oy. Онда је $x_3 = y_3 = 0$; $x_1 \neq 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 \neq 0$. Имамо да је у том случају $P(\triangle(A,B,C)) : P(\triangle(O,E_1,E_2)) = |x_1 y_2|$. Комбиновањем знакова за x_1 и y_2 и њима одговарајућих оријентација посматраних троуглова уверавамо се да је за све четири могућности

$$P_o(\triangle(A,B,O)) = S_0 \cdot x_1 y_2. \tag{2}$$

Нека се теме C и даље поклапа с координатним почетком а темена A и B су било које две тачке у равни, међусобно различите и различите од C. Означимо са A_1 и B_1, тим редом, пресечне тачке осе Ox и правих кроз A и B, паралелних са осом Oy. Применом једнакости (1) на четворку тачака (A,B,O,A_1) добијамо да важи $P_o(\triangle(A,B,O)) = P_o(\triangle(A,B,A_1)) + P_o(\triangle(B,O,A_1)) + P_o(\triangle(O,A,A_1))$. Јасно је да се површина троугла и његова оријентација неће променити ако се једно од темена помери по правој паралелној њему наспрамној страници.



Слика 5

Због тога је $P_o(\triangle(A,B,A_1)) = P_o(\triangle(A,B_1,A_1))$, па претходну једнакост можемо писати у облику

(3) $P_o(\triangle(A,B,O)) = P_o(\triangle(A,B_1,A_1)) + P_o(\triangle(B,O,A_1)) + P_o(\triangle(O,A,A_1))$.

Означимо затим са A_2 и B_2, тим редом, пресечне тачке осе Oy и правих кроз A и B, паралелних са осом Ox. Применом једнакости (1) на четворку тачака (A,B_1,O,A_1) налазимо да је испуњена једнакост

$$P_o(\triangle(A,B_1,O)) = P_o(\triangle(A,B_1,A_1)) + P_o(\triangle(B_1,O,A_1)) + P_o(\triangle(O,A,A_1)).$$

Како је $P_o(\triangle(B_1,O,A_1)) = 0$, и уз то је $P_o(\triangle(A_1,B,O)) = P_o(\triangle(A_1,B_2,O))$ и $P_o(\triangle(B_1,A,O)) = P_o(\triangle(B_1,A_2,O))$, налазимо да се једнакост (3) може писати у облику $P_o(\triangle(A,B,O)) = P_o(\triangle(A_1,B_2,O)) - P_o(\triangle(B_1,A_2,O))$. Из ове једнакости, применом (2), коначно налазимо

(4) $$P_o(\triangle(A,B,O)) = S_0(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Ако је $\triangle(A,B,C)$ произвољан троугао у оријентисаној координатној равни, онда нам (1) за четворку тачака (A,B,C,O) даје

$$P_o(\triangle(A,B,C)) = P_o(\triangle(B,C,O)) + P_o(\triangle(S,A,O)) + P_o(\triangle(A,B,O)),$$

одакле, применом (4), налазимо

$$P_o(\triangle(A,B,C)) = S_0((x_2y_3 - y_2x_3) - (x_1y_3 - y_1x_3) + (x_1y_2 - y_1x_2)).$$

Теорема је доказана. ■

Задаци

1. Израчунај површину троугла (A,B,C) ако су му задате координате темена у Декартовом правоуглом координатном систему: $A(2,-3)$, $B(-1,5)$, $C(4,1)$.
2. Наћи неопходан и довољан услов за колинеарност три тачке у општем Декартовом координатном систему.
3. Тачке P,Q,R деле, редом, странице BC, CA, AB троугла (A,B,C) у односима $1:1$, $1:2$, $1:3$. Израчунај однос површина троуглова (A,B,C) и (P,Q,R).

Завршни коментар. Читаоцу ће се, уверени смо у то, овај приступ учинити „заметним“; њиме се, на неки начин, једноставни поступци, познати у оквирима савременог приступа обрађиваним садржајима, замењују сложеним трансформацијама, често потпомогнутим ситним досеткама и систематским претраживањем бројних случајева. Оправдање за свој напор да овај материјал учинимо доступним читаоцима налазимо у бар два разлога. Он, пре свега, сведочи о историјату наставе математичких предмета у Математичкој гимназији. С друге стране, мишљења смо да ће његово упознавање уверити читаоце да осавремењивање наставе, по правилу, представља и њену рационализацију, што се може сматрати малим доприносом у трагању за дидактичким трансформацијама обрађиваних садржаја.

Математичка гимназија, Краљице Наталије 37, Београд
E-mail: vladimic@EUnet.rs