НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXI, 4 (2016), 1–9

Др Владимир Мићић

МАЛО О ХЕУРИСТИЦИ, ТРОУГЛОВИМА И МЕЂУТАЧКАМА

Приликом реализације програмом предвиђених садржаја у настави математике проблем мотивације ученика је, несумњиво, важна компонента. Стога је корисно да се настава, повремено, „зачини" занимљивим задацима. При томе морамо водити рачуна о саставу одељења и стварним могућностима ученика. Наравно, ако проценимо да оваквим садржајима у нашем одељењу није место у оквирима редовне наставе, додатна настава ће бити право место за њихову обраду.

У овом чланку приказаћемо наше виђење неких садржаја који могу илустровати ово тврђење; они су у потпуности ослоњени на појмове с којима су се ученици упознавали у оквирима редовне наставе и могу се обрађивати делом већ у основној школи, а у целини, насигурно, у завршним разредима средње школе. Наведени су извори у којима смо нашли обрађене задатке, што ученике може додатно мотивисати да се за њих заинтересују. Надамо се да ће читалац, у начину на који је део тих садржаја обрађен, препознати и наш покушај да демонстрирамо идеје, методе и конкретне кораке који су у класичној књизи [1] „Како решавати задатке" Ђерђа Поље (György Polya) предложени за решавање сложенијих математичких задатака. Трећа глава те књиге носи наслов *Мали хеуристички лексикон* и обухвата, приближно, њених пет шестина. То нас је подстакло да почетне редове овог текста посветимо осврту на појам хеуристике и на њу надовезане садржаје о неким стратегијама остваривања циљева наставе математике.

О хеуристици

Архимедов узвик „Еурека!" ($E\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$!) једна је од првих грчких речи са којима смо се у наем школовању срели. Њено је значење „Нашао сам!"; на тај начин је он изразио своје задовољство због тога што је открио чињеницу да: „Тело уроњено у течност губи од своје тежине онолико колико тежи телом истиснута течност", што је један од основних закона хидростатике. Та се реч налази у основи речи *хеуристика* и из ње изведене синтагме *хеуристички метод*; тим је именом назван поступак чији је циљ да проучава методе и правила проналажења (откривања) нових сазнања, нарочито научних истина. Он трасира пут према строгом доказу неке истине, несумњиво је користан и саставни је део трагања за њом.

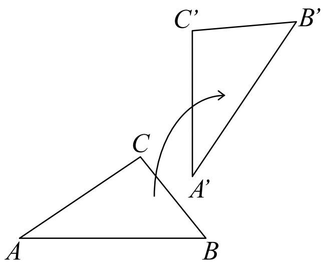
Решавање задатака је важан део математике од њених почетака и неизоставни део наставе математике у свим временима. У том делу наставе хеуристички метод можемо описати као поступак налажења и систематизовања низа задатака, који нам помажу да решимо неки сложенији задатак или наслутимо неко опште тврђење, истину којој ћемо приписати снагу или важност теореме. Кроз историју математике се и неким од значајних стваралаца, који су ту историју исписивали (списак, наравно, ни издалека није потпун, а сва су ова презимена позната читаоцима и нећемо их детаљније представљати), као што су: Декарт, Лајбниц, Болцано, ... , у новије време, Пуанкаре, Штајнхаус, Фројдентал, Колмогоров, ... , може приписати значајан допринос изградњи хеуристичког метода у математици.

Двадесети век, поред осталог, карактеришу и настојања да се многе активности, па и настава математике, заснују на чвршћим темељима. То је резултирало различитим истраживањима у тој области, оствариваним од стране математичара, али и посленика из области педагошких, психолошких и философских наука. Уверени смо да у тој области значајно место припада Ђерђу Пољи (1887–1985), мађарско-америчком математичару. Запажени су његови научни резултати у разним областима математике (функционалној анализи, теорији комплексних функција, теорији вероватноће, ...). Уз то, „Збирка задатака и теорема из анализе“ (са Г. Сеге-ом) била је, данас бисмо рекли, светски бестселер у области математичке литературе. Био је истакнути популаризатор математике. Из таквог опуса проистекле су познате књиге [1, 2, 3], Пољина трилогија (или триптих), које су представљале значајан допринос теоријском заснивању наставе математике и одлучујући подстицај афирмацији хеуристичког метода у области решавања задатака (проблема) у настави математике. Његове су идеје употпуњене новим садржајима и осавремењене у књизи [4]; уверени смо да је то тек један од чланова у низу следбеника Ђ. Поље.

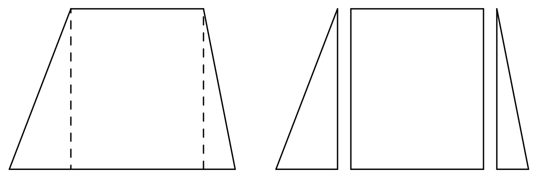
Међу савременим стратегијама за остваривање наставе математике могу се навести бар три, које у својој основи морају имати, у целини или неким деловима, идеје Ђерђа Поље. То је, пре свега, *учење откривањем* (discovery learning). Хеуристички метод је пут ка откривању, па је очигледно да се доминантно место хеуристичког метода код Поље може сматрати каменом темељцем за ову стратегију. С овом је проблематиком у вези и наш покушај [5]. Наглашена настојања Ђ. Поље да избором група задатака, које воде до решења неког сложеног проблема, њиховим формулацијама и начинима њиховог решавања, сведоче о томе да је његова трилогија битан део заснивања и реализације стратегија *решавања задатака* (problem solving) и *постављања задатака* (problem posing) (видети, на пример, [6]).

Троуглови и међутачке

Претходна знања. У оквирима редовне наставе ученици су се већ у основној школи (у шестом разреду) срели с појмом средишних дужи (средњих линија) троугла и неким чињеницама (теоремама) у вези с њима. Научили су појам подударности фигура у равни, теореме о подударности троуглова, као и појмове површине троугла и четвороугла и неке од начина њиховог израчунавања.

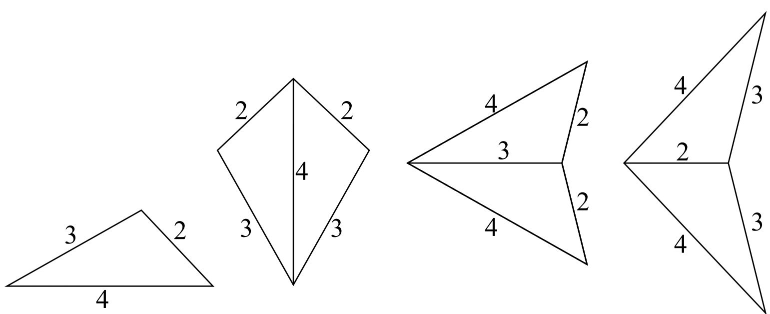


Слика 1



Слика 2

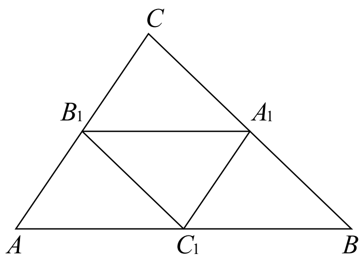
На опажајном нивоу, без формалних дефиниција одговарајућих ставова, научили су да се приликом премештања неке фигуре њена површина не мења (слика 1). На истом нивоу су научили да се фигура у равни може разложити на више фигура (троуглова, четвороуглова, ...) и да је при томе збир површина добијених делова једнак површини фигуре. Тако се, на пример, сваки трапез може разложити на један правоугаоник и два правоугла троугла (слика 2) и његова је површина једнака збиру површина тог правоугаоника и тих троуглова. Исто тако се од више фигура може, допуњавањем, сложити нова фигура и при томе ће збир површина делова бити једнак површини добијене фигуре. Сваки се троугао може на три начина допунити подударним троуглом и на тај начин ће се добити три различите фигуре. Ако је троугао оштроугли, биће то три делтоида; ако је троугао правоугли, биће то два троугла и један делтоид; ако је троугао тупоугли, као на нашој слици 3, биће то један делтоид и два неконвексна четвороугла. Површина сваке од добијених фигура једнака је збиру површина та два троугла, дакле, једнака удвострученој површини основног троугла.



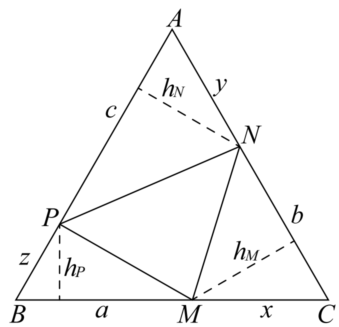
Слика 3

Ако тачка T припада дужи AB и не поклапа се са њеним крајевима A, B, можемо рећи да је T *међутачка* дужи AB (унутрашња тачка интервала (A, B)). Средиште сваке дужи је њена међутачка.

1. Посматрајмо произвољни троугао ABC и нека су A_1, B_1, C_1 средишта његових страница (тим редом) BC, CA, AB (слика 4). Подсетимо се да су средишне дужи троугла ABC дужи A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, чије су крајње тачке средишта двеју страница троугла. Има их три, свака од њих је паралелна њој наспрамној страници троугла и свака од страница троугла је два пута дужа од њој паралелне средишне дужи. У шестом разреду ученици су научили да средишне дужи деле троугао ABC на четири подударна троугла: AC_1B_1, C_1BA_1, B_1A_1C, $A_1B_1C_1$, затим (у седмом разреду) да је сваки од тих троуглова сличан троуглу ABC и површина му је једнака једној четвртини површине троугла ABC. Сувишно је напоменути да су ови садржаји обрађени и у одговарајућим уџбеничким материјалима за шести, односно седми разред ОШ, на пример у [7].



Слика 4



Слика 5

2. У седмом разреду ученици су научили Питагорину теорему и упознали неке од њених примена. Специјално, научили су како се помоћу дужине странице израчунава висина и површина једнакостраничног троугла. Применићемо ово да демонстрирамо како се знања из геометрије могу применити да се докаже једно занимљиво и не баш једноставно алгебарско тврђење.

Задатак 1. Ако су a, b, c, x, y, z позитивни реални бројеви за које важе једнакости

$$a + x = b + y = c + z = 1,$$

онда је $az + bx + cy < 1$. Докажи.

Решење. Посматрајмо једнакостранични троугао ABC странице 1 и нека су M, N, P међутачке, тим реом, страница BC, CA, AB, такве да је: $BM = a$, $MC = x$; $CN = b$, $NA = y$; $AP = c$, $PB = z$ (слика 5). Видимо да је испуњено $a + x = b + y = c + z = 1$. Будући да је троугао ABC једнакостраничан, његови углови имају по 60°. Због тога површине троуглова BMN, MCN, NAP једноставно изражавамо преко a, b, c, x, y, z:

$$P(\triangle BMP) = \frac{1}{2}\, ah_P = \frac{1}{2}\, az\, \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P(\triangle MCN) = \frac{1}{2}\, bh_M = \frac{1}{2}\, bx\, \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P(\triangle NAP) = \frac{1}{2}\, ch_N = \frac{1}{2}\, cy\, \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Збир ове три површине мањи је од површине једнакостраничног троугла ABC. Дакле,

$$az\,\frac{\sqrt{3}}{4}+bx\,\frac{\sqrt{3}}{4}+cy\,\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{\sqrt{3}}{4},$$

односно

$$az+bx+cy<1,$$

што је требало доказати.

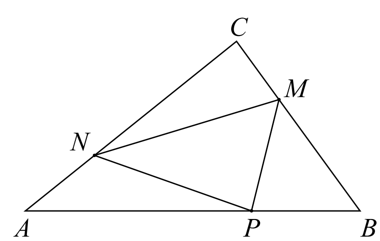
Напомена. Овај задатак и његово решавање приказала је колегиница Иванка Томић на зимском семинару 2016. године.

3. У занимљивој књизи (ми смо се користили преводом на руски језик [8]) познатог пољског математичара Хуга Штајнхауза (Hugo Steinhaus) наведен је проблем за чије се решавање могу користити међутачке страница троугла и описана (разложива и допунска) једнакост површина фигура. Обај проблем је подесан „терен“ и лепа илустрација примене методе Ђерђа Поље.

Задатак 2. Дат је произвољни троугао ABC. Исеци из њега троугао XYZ чија је површина једнака једној седмини површине троугла ABC.

Јасно је да задатак има решења. Како га наћи, конструисати, одредити на неки начин? Чини нам се да немамо за шта да се „ухватимо“. Поља нам саветује да се присетимо неког сличног задатка. Пада нам на памет чињеница да је сваки троугао својим средњим линијама подељен на четири подударна троугла. Средишта страница троугла су њихове међутачке; оне деле одговарајуће странице у односу $1:1$. Може ли нам, на пример, однос $2:1$ помоћи?

Цртамо произвољни троугао ABC и уочавамо на његовим страницама BC, CA, AB, тим редом, међутачке M, N, P, које их деле тако да буде $BM:MC=CN:NA=AP:PB=2:1$. Можда троугао MNP испуњава тражени услов? „Видимо са слике“ да то није случај. А можда неки други троугао конструисан на тај начин?

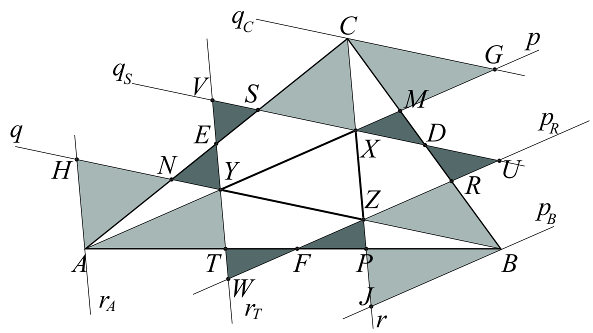


Слика 6

После неколико неуспешних покушаја „гурамо у страну“ ову идеју. Ђерђ Поља нас „гледа из прикрајка“ и подсећа да понекад морамо у разматрање узети и неки елемент којим сами треба да употпунимо слику. То је, по правилу, озбиљан проблем и захтева суверено познавање одговарајућих садржаја, досетљивост, искуство, смелост, ... Уочавамо неке тачке које нам се нуде, повлачимо неке нормале, паралеле, ... Ово трагање нас доводи до новог задатка, који ће нам решити полазни задатак 2.

Задатак 3. Дат је произвољни троугао ABC. Уочимо на његовим страницама BC, CA, AB, редом, међутачке M, N, P, такве да је $BM:MC=CN:NA=AP:PB=2:1$. Означимо праве $p=p(A,M)$, $q=q(B,N)$, $r=r(C,P)$.

Нека је X пресечна тачка правих p и r, Y пресечна тачка правих p и q, а Z пресечна тачка правих q и r. Одредити однос површина троуглова ABC и XYZ.



Слика 7

Решење. Уочимо на страницама датог троугла и међутачке R, S, T, такве да буде $BR : RC = CS : SA = ST : TB = 1 : 2$. Тачке R и M деле дуж BC на три једнака дела, тачке S и N деле дуж CA на три једнака дела, а тачке T и P деле дуж AB на три једнака дела. Повуцимо: правој p паралелне праве p_R кроз R и p_B кроз B; правој q паралелне праве q_S кроз S и q_C кроз C; правој r паралелне праве r_T кроз T и r_A кроз A. Дозволићемо себи да не објашњавамо реченицама бројне ознаке на слици 7; очекујемо да ће читалац пронаћи без тешкоћа геометријске објекте (тачке, дужи, троуглове, четвороуглове) о којима буде речи у даљем тексту. Тачке X, Y, Z су средишта страница, а дужи XY, YZ, ZX средње линије троугла UVW. Због тога је површина троугла XYZ једнака четвртини површине троугла UVW. Троуглови XGC, YHA, ZJB су подударни с троуглом XYZ (према правилу УСУ о подударности). Према истом правилу подударни су: троуглови ANH и CSX, троуглови ESV и ENY, троуглови AYT и BJP, троуглови FTW и FPZ, троуглови CMG и BRZ, троуглови DMX и DRU. Користећи се овим чињеницама и раније поменутим ставовима о допунској и разложивој једнакости површина фигура, налазимо да је површина троугла XYZ једнака површини: четвороугла $ATYN$, четвороугла $TPZY$, четвороугла $PBRZ$, четвороугла $RMXZ$, четвороугла $MCSX$ и четвороугла $SNYX$. Ако уочимо да се троугао ABC може разложити на троугао XYZ и наведених шест четвороуглова, закључујемо да важи $P(\triangle ABC) = 7 \cdot P(\triangle XYZ)$.

На тај начин смо решили и задатак 2. Површина овде конструисаног троугла XYZ једнака је једној седмини површине троугла ABC.

4. Истом кругу проблема припада и један од задатака са Осме међународне математичке олимпијаде, Софија 1966, задатак број 6, предлог делегације Пољске (видети, на пример, [9]).

Задатак 4. Нека су M, K, L, редом, међутачке страница AB, BC, CA троугла ABC. Доказати да је површина бар једног од троуглова MAL, KBM, LCK мања или једнака једној четвртини површине троугла ABC.

Решење. Означимо са S површину троугла ABC ($P(\triangle ABC) = S$). Нека су A_1, B_1, C_1, тим редом, средишта страница BC, CA, AB. Знамо да је

$$P(\triangle A_1B_1C) = P(\triangle B_1C_1A) = P(\triangle A_1B_1C) = \frac{1}{4}\,S.$$

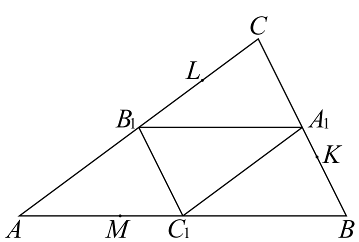
Ако се све три међутачке M, K, L поклапају са средиштима C_1, A_1, B_1 страница троугла, онда су све три поменуте површине једнаке $\frac{1}{4}S$ и тврђење је тачно. Нека се бар једна од њих не поклапа са средиштем странице којој припада. На пример, нека се M не поклапа са C_1. Не нарушавајући општост расуђивања, претпоставимо да је M међутачка дужи AC_1. Ако се, у том случају, тачка L поклапа са B_1 или је међутачка дужи AB_1, онда је $P(\triangle AML) < \frac{1}{4}S$ и тврђење је тачно. Ако то није, онда је L међутачка дужи B_1C. Ако се, у том случају, K поклапа са A_1 или је међутачка дужи CA_1, онда је $P(\triangle LCK) < \frac{1}{4}S$ и тврђење је тачно. Ако то није, онда је K међутачка дужи A_1B. Дакле, преостаје само случај који је приказан на слици 8. У том случају је

$$P(\triangle KLM) > P(\triangle KLC_1) > P(\triangle KB_1C_1) = P(\triangle AB_1C_1) = \frac{1}{4}\,S.$$

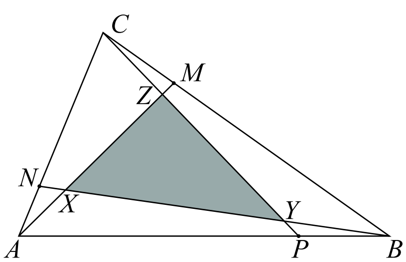
Знамо да је

$$P(\triangle KLM) + P(\triangle KLC) + P(\triangle LMA) + P(\triangle MKB) = S.$$

Доказали смо да је $P(\triangle KLM) > \frac{1}{4}S$; због тога бар један од преостала три сабирка мора бити мањи од $\frac{1}{4}S$, чиме је наш доказ употпуњен.



Слика 8



Слика 9

5. Пољске математичке олимпијаде (видети [10]) имају дугу традицију (од 1949. године). На једној од њих појавио се задатак који је у непосредној вези са садржајима овог чланка. Приликом решавања овог задарка користи се позната Менелајева теорема за троугао; видети, на пример, [11, стр. 87].

Задатак 5. На страницама BC, CA, AB троугла ABC изабране су тачке M, N, P тако да је

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k, \tag{1}$$

где је k задати број већи од 1, и повучене су дужи AM, BN, CP (слика 9). Израчунати површину троугла који образују праве AM, BN, CP ако је површина S троугла ABC позната.

Решење. Нека су X, Y, Z пресечне тачке правих AM, BN, CP. Онда је

$$P(\triangle ABM) = \frac{BM}{BC} \cdot S, \quad P(\triangle ABX) = \frac{AX}{AM} \cdot P(\triangle ABM),$$

односно

$$P(\triangle ABX) = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{AX}{AM} \cdot S. \tag{2}$$

Користећи се једнакостима (1) једноставно налазимо да је $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{k}{k+1}$. Троугао ACM је пресечен правом BN, па применом Менелајеве теореме добијамо

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MX}{XA} = 1,$$

што се може написати у облику

$$\frac{NA}{CN} \cdot \frac{MC + BM}{BM} \cdot \frac{MX}{XA} = 1.$$

Користећи се опет једнакостима (1) налазимо

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 1\right) \cdot \frac{MX}{XA} = 1,$$

одакле следи $\dfrac{AX}{XM} = \dfrac{k+1}{k^2}$, што нам коначно даје

$$\frac{AX}{AM} = \frac{AX}{AX + XM} = \frac{k+1}{k^2 + k + 1}.$$

Заменом добијених вредности у (2) налазимо

$$P(\triangle ABX) = \frac{k}{k^2 + k + 1} \cdot S.$$

Уз одговарајуће промене слова ћемо, на исти начин, наћи да је

$$P(\triangle ABX) = P(\triangle BCY) = P(\triangle CAZ) = \frac{k}{k^2 + k + 1} \cdot S.$$

Имајући у виду да је (видимо са слике)

$$P(\triangle XYZ) = S - (P(\triangle ABX) + P(\triangle BCY) + P(\triangle CAZ)),$$

коначно налазимо

$$P(\triangle XYZ) = \frac{(k-1)^2}{k^2 + k + 1} \cdot S.$$

Ако се изабере $k = 2$, налазимо да је однос површина датог троугла ABC и у њему на захтевани начин конструисаног троугла XYZ једнак 7. До истог смо резултата, другим путем, дошли решавајући задатак 3.

Уверени смо да ће посвећени наставник математике, у својој наставној пракси и трагању за новим, занимљивим садржајима, наћи различите области у којима се, кроз низ сродних проблема, остварују неке од идеја Ђерђа Поље, једног од значајних прегалаца на пољу садржајног и методичког обогаћивања наставног процеса.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Polya, *How to Solve It. A new aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945.

[2] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, 1954.

[3] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, 1962.

[4] Z. Michalewicz and D. Fogel, *How to Solve It: Modern Heuristics*, Springer, 2000.

[5] В. Мићић, *Учење откривањем – можда нови приступ*, Настава математике L–4, Друштво математичара Србије, Београд, 2005.

[6] J. Милинковић, *Огледи о учењу и настави математике*, Учитељски факултет, Београд, 2016.

[7] Ђ. Дугошија, В. Андрић, В. Јоцковић, В. Мићић, *Математика за шести разред ОШ*, Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[8] Г. Штейнгауз, *Математический калейдоскоп*, «Наука», Москва, 1981.

[9] D. Đukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium*, Springer, 2007.

[10] J. Browkin, J. Rempala, S. Straszewicz, *25 lat olimpiady matematycznej*, Warszawa, 1975.

[11] Ђ. Дугошија, В. Андрић, В. Јоцковић, В. Мићић, *Збирка задатака из математике за седми разред ОШ; за оне који желе и могу више*, Завод за уџбенике, Београд, 2009.

E–mail: `vladimic@EUnet.rs`