Мр Амар Башић

ПРИМЈЕНА МЕТОДЕ КООРДИНАТА У ПЛАНИМЕТРИЈИ И СТЕРЕОМЕТРИЈИ, 1. дио

1. Увод

Метода координата или сликовитије, употреба правоуглог координатног система је основна и природна метода истраживања и рјешавања проблема у аналитичкој геометрији. Међутим, метода координата понекада се може примијенити и у другим подручјима геометрије, као нпр. у планиметрији и стереометрији. Задаци из подручја у којима је то могуће најчешће су задаци који се могу ријешити на више начина.

Методички разлог за рјешавање задатака на више начина лежи у томе да тада за рјешавање треба више теоријских чињеница. Тада се упоређивањем датих рјешења може утврдити које је од њих краће, ефектније и елегантније. На овај начин ученици стичу и изграђују вјештину рјешавања задатака те мислим да ће овај рад бити од користи посебно ученицима који показују већи интерес за математику и који учествују на разним математичким такмичењима.

У овом, првом делу, рада ћемо описати примјену методе координата у планиметрији. Даћемо доказе неких теорема, илустровати примјену методе гдје она даје релативно једноставнија рјешења док и у неким проблемским задацима долазимо до потпунијег и садржајнијег рјешења, али водећи ра?уна о садржајима везаним за област Аналитичка геометрија који су познати ученицима средњих школа као што су: удаљеност између двије тачке, подјела дужи у датом односу, координате тежишта троугла, разни облици једначине праве (једначина праве кроз једну тачку, једначина праве кроз двије тачке), услов паралелности и нормалности двије праве, удаљеност тачке од праве, површина троугла, једначина симетрале угла између двију правих, једначина кружнице, итд.

Основно питање је како најповољније поставити координатни систем. Обично се поступа на један од сљедећих начина:

- за координатни почетак O координатног система одабере се нека истакнута тачка посматраног лика (теме, средиште странице, тежиште, ортоцентар, пресјек дијагонала, додир тангенте и криве, итд.),
- за барем једну координатну осу одабере се права на којој лежи неки истакнути елемент лика (страница, висина, тежишна линија, дијагонала, тетива, симетрала странице, симетрала угла, тангента, итд.).

Овим се често постиже да неке тачке лика добијају једноставне координате, што се посебно одражава на једначине одређених правих и једноставније израчунавање тражене величине или брже доказивање постављеног тврђења.

2. Примјена методе координата у планиметрији

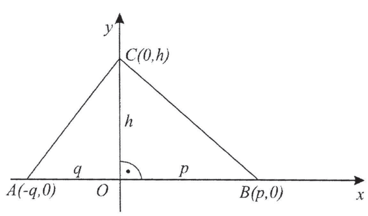
Даћемо сада више примјера примјене координатне методе при доказивању геометријских теорема. Почињемо са једним доказом теореме из основношколске математике.

Теорема 1. Висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла је геометријска средина одсјечака које висина гради на њој.

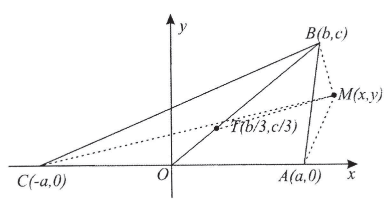
Доказ. Одаберемо ли координатни систем тако да је подножје висине из тјемена правог угла у координатном почетку, тада тјемена троугла имају сљедеће координате: $A(-q,0)$, $B(p,0)$, $C(0,h)$ (сл. 1). Како је троугао правоугли, то из услова задатка имамо $AC^2+BC^2=AB^2$, те редом добијамо:

$$(0+q)^2+(h-0)^2+(0-p)^2+(h-0)^2=(p+q)^2,$$
$$q^2+h^2+p^2+h^2=p^2+2pq+q^2,$$
$$2h^2=2pq, \quad h^2=pq, \quad h=\sqrt{pq},$$

што је и требало доказати. ■



Слика 1



Слика 2

Сада ћемо прећи на доказе нешто сложенијих геометријских теорема.

Теорема 2 (Лајбницова[1] теорема). Дат је троугао ABC и произвољна тачка M у његовој равни. Ако је T тежиште тог троугла, доказати да је

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MT^2+AT^2+BT^2+CT^2. \tag{1}$$

Доказ. У доказу ове теореме одаберимо координатни систем с координатним почетком O у средишту странице AC датог троугла и x-осом којој припада та страница (сл. 2). Тада тјемена троугла ABC имају координате $A(a,0)$, $B(b,c)$

[1] G. W. Leinbitz (1646–1716), њемачки филозоф и математичар

и $C(-a,0)$. Сада је тежиште T троугла тачка $T\left(\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$. Ако тачка M у равни троугла има координате (x,y), имамо

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=(x-a)^2+y^2+(x-b)^2+(y-c)^2+(x+a)^2+y^2\\&=3x^2+3y^2+2a^2+b^2+c^2-2bx-2cy.\end{aligned}\tag{2}$$

С друге стране добијамо да је

$$\begin{aligned}&3MT^2+AT^2+BT^2+CT^2\\&\quad=3\Big[\Big(x-\frac{b}{3}\Big)^2+\Big(y-\frac{c}{3}\Big)^2\Big]+\Big(a-\frac{b}{3}\Big)^2+\Big(\frac{c}{3}\Big)^2+\Big(b-\frac{b}{3}\Big)^2+\Big(c-\frac{c}{3}\Big)^2\\&\qquad+\Big(\frac{b}{3}+a\Big)^2+\Big(\frac{c}{3}\Big)^2\\&\quad=3x^2+3y^2+2a^2+b^2+c^2-2bx-2cy.\end{aligned}\tag{3}$$

Сада из горњих једнкости (2) и (3) добијамо једнакост (1) коју је требало доказати. ∎

Наведимо сада и двије посљедице претходне теореме.

Посљедица 1. Ако су t_a, t_b и t_c дужине тежишних дужи троугла ABC из његових тјемена A, B и C, тада је

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

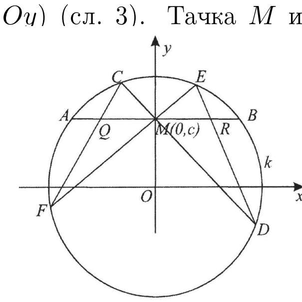
Посљедица 2. Важе сљедеће једнакости:

$$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\quad t_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\quad t_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Теорема 3 (Теорема о лептиру). Нека је дата тетива AB круга k и нека је њено средиште тачка M. Кроз тачку M су повучене двије произвољне тетиве EF и CD. Тетиве CF и ED сијеку праву AB у тачкама Q и R. Тада је тачка M уједно и средиште дужи QR, тј. $MQ=MR$.

Доказ. Уведимо координатни систем xOy гдје је координатни почетак O средиште круга k, а $Ox \parallel AB$ и $Oy \perp AB$ $(M \in Oy)$ (сл. 3). Тачка M има координате $M(0,c)$ а права AB има једначину $y=c$, те права FE има једначину $y=\lambda x+c$. Круг k има једначину $x^2+y^2=R^2$. Сада ћемо наћи пресјече тачке круга k и праве FE, тј. ријешићемо систем једначина:

$$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ y=\lambda x+c.\end{cases}$$



Слика 3

Добијамо сљедећу једначину

$$(1+\lambda^2)x^2+2\lambda cx+c^2-R^2=0,\tag{1}$$

чија су рјешења x_1 и x_2 којима одговарају вриједности $y_1=\lambda x_1+c$ и $y_2=\lambda x_2+c$. Дакле, добили смо тачке $E(x_1,y_1)$ и $F(x_2,y_2)$.

Аналогно добијамо и координате тачака C и D рјешавањем система једначина круга k: $x^2+y^2=R^2$ и праве CD: $y=\mu x+c$ $(\mu\neq\lambda)$. Из овог система добијамо једначину

$$(1+\mu^2)x^2+2\mu cx+c^2-R^2=0, \tag{2}$$

те имамо $C(x_1',y_1')$ и $D(x_2',y_2')$, гдје је $y_1'=\mu x_1'+c$ и $y_2'=\mu x_2'+c$ јер је једначина праве CD: $y=\mu x+c$. Сада права CF има једначину

$$CF:\quad \frac{x-x_1'}{x_2-x_1'}=\frac{y-y_1'}{y_2-y_1'}.$$

Сада још треба да одредимо координате тачака Q и R. Тачка Q је пресјек правих AB и CF. Рјешавањем одговарајућег система једначина имамо за њене координате:

$$\begin{aligned} x&=x_1'+\frac{c-y'}{y_2-y_1'}(x_1-x_1')=x_1'-\frac{\mu x_1'(x_2-x_1')}{y_2=y_1'}\\ &=x_1'\left[1-\frac{\mu(x_2-x_1')}{\lambda x_2-\mu x_1'}\right]=\frac{(\lambda-\mu)x_1'x_2}{\lambda x_2-\mu x_1'} \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогно, рјешавањем система једначина правих DE и AB, добијамо апсцису њихове пресјечне тачке $R=DE\cap AB$,

$$x=\frac{(\lambda-\mu)x_1x_2'}{\lambda x_1-\mu x_2'}. \tag{4}$$

Сада је довољно показати да је збир апсциса (3) и (4) једнак нули и тиме ће теорема 3 бити доказана. доказана. Имамо

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda-\mu)x_1'x_2}{\lambda x_2-\mu x_1'}+\frac{(\lambda-\mu)x_1x_2'}{\lambda x_1-\mu x_2'}&=\frac{(\lambda-\mu)[x_1'x_2(\lambda x_1-\mu x_2')+x_1x_2'(\lambda x_2-\mu x_1')]}{(\lambda x_2-\mu x_1')(\lambda x_1-\mu x_2')}\\ &=\frac{(\lambda-\mu)[\lambda x_1x_2(x_1'+x_2')-\mu x_1'x_2'(x_1+x_2)]}{(\lambda x_2-\mu x_1')(\lambda x_1-\mu x_2')}=0, \end{aligned}$$

јер из једначина (1) и (2) имамо на основу Виетових[2] правила:

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{2\lambda c}{1+\lambda^2},\quad x_1x_2=\frac{c^2-R^2}{1+\lambda^2},\\ x_1'+x_2'&=-\frac{2\mu c}{1+\mu^2},\quad x_1'x_2'=\frac{c^2-R^2}{1+\mu^2}. \end{aligned}$$

Овим је показано да важи $MR=MQ$, што и тврди теорема 3. ■

Сада ћемо дати неколико примјера примјене методе координата.

Задатак 1. Наћи углове троугла код којег висина и тежишна дуж повучене из истог тјемена дијеле тај угао на три једнака дијела.

Рјешење. Одаберимо правоугли координатни систем xOy тако да је: $AB\subset Ox$, $O\equiv A$, и $B(c,0)$, $C(u,v)$, $D(c/4,0)$, $E(c/2,0)$, $AC=b$, $AB=c$, $BC=a$

[2] F. Viete (1540–1603), француски математичар

и $\gamma = 3\varphi$ (сл. 4). Имамо да је $u = \dfrac{c}{4}$, $v^2 = b^2 - \left(\dfrac{c}{4}\right)^2$, тј. добијамо да је $v = \dfrac{1}{4}\sqrt{16b^2 - c^2}$, те је $C\Big(\dfrac{c}{4}, \dfrac{1}{4}\sqrt{16b^2 - c^2}\Big)$. Једначине правих AC, CD, CE и BC су дате са:

$$AC: \quad y = \frac{\sqrt{16b^2 - c^2}}{c}\,x; \quad CD: \quad x = \frac{c}{4};$$
$$CE: \quad y = -\frac{\sqrt{16b^2 - c^2}}{c}\left(x - \frac{c}{2}\right); \quad BC: \quad y = -\frac{\sqrt{16b^2 - c^2}}{3c}(x - c).$$

Сада добијамо да је $\operatorname{tg}\angle(AC, CD) = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{16b^2 - c^2}}$ и аналогно

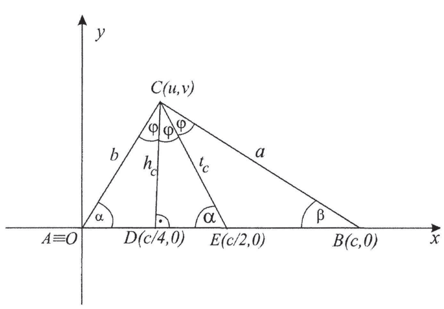
$$\operatorname{tg}\angle(CE, EB) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\dfrac{\sqrt{16b^2 - c^2}}{3c} + \dfrac{\sqrt{16b^2 - c^2}}{c}}{1 + \dfrac{\sqrt{16b^2 - c^2}}{3c} \cdot \dfrac{\sqrt{16b^2 - c^2}}{c}} = \frac{\dfrac{2\sqrt{16b^2 - c^2}}{3c}}{1 + \dfrac{16b^2 - c^2}{3c^2}}$$
$$= \frac{c\sqrt{16b^2 - c^2}}{c^2 + 8b^2}.$$

Сада због једнакости углова $\angle(AC, CD) = \angle(CE, CB)$ (из услова задатка) добијамо

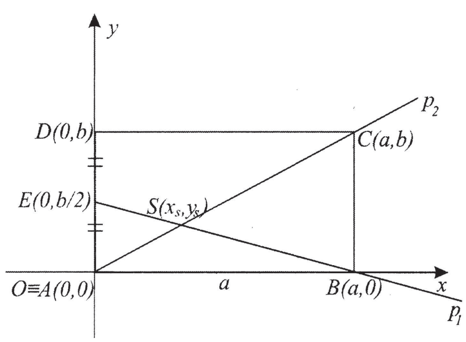
$$\frac{c}{\sqrt{16b^2 - c^2}} = \frac{c\sqrt{16b^2 - c^2}}{8b^2 + c^2},$$

одакле, редом, $8b^2 + c^2 = 16b^2 - c^2$, $c^2 = 4b^2$, $c = 2b$ и $AB = 2AC$.

Сада из $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{16b^2 - c^2}}$ имамо $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2b}{\sqrt{16b^2 - 4b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, тј. $\varphi = 30°$. Коначно, углови троугла су: $\gamma = 3\varphi = 90°$, $\alpha = 90° - \varphi = 60°$, $\beta = 90° - 2\varphi = 30°$.



Слика 4



Слика 5

Задатак 2. (Кантонално такмичење ученика средњих школа – III разред, Сарајево, 2013. година) Дат је правоугаоник $ABCD$. Нека је тачка E средиште странице AD. У правоугаонику су повучене праве EB и AC које се сијеку у тачки S. Одредити у ком су односу површине четири настала дијела (три троугла $\triangle ASE$, $\triangle ASB$, $\triangle BSC$ и четвороугао $ESCD$), тј. израчунај однос површина $P_{ASE} : P_{ASB} : P_{BSC} : P_{ESCD}$.

Рјешење. Поставимо координатни систем тако да се тјеме A правоугаоника $ABCD$ налази у координатном почетку (сл. 5). Нека права p_1 садржи дуж EB, а права p_2 нека садржи дуж AC (дијагоналу правоугаоника). Нека су једначине тих правих:

$$p_1 : \quad y = k_1 x + n_1, \quad p_2 : \quad y = k_2 x + n_2.$$

Са сл. 5 имамо да је

$$k_1 = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{\frac{b}{2} - 0}{0 - a} = -\frac{b}{2a} \text{ и } n_1 = \frac{b}{2}, \text{ па је } p_1 : \quad y = -\frac{b}{2a}\, x + \frac{b}{2}.$$

Такође, имамо да је

$$k_2 = \frac{b}{a} \text{ и } n_2 = 0 \text{ па је } p_2 : \quad y = \frac{b}{a}\, x.$$

Тачку S пресјека правих p_1 и p_2 добијамо као рјешење система претходно добијених једначина, тј. добијамо

$$\frac{b}{a}\, x_S = -\frac{b}{2a}\, x_S + \frac{b}{2},$$

одакле се добија $x_S = \dfrac{a}{3}$ и затим $y_S = \dfrac{b}{3}$, па је $S\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{b}{3}\right)$.

Сада користећи формулу за површину троугла, добијамо

$$\begin{aligned} P_{ASE} &= \frac{1}{2}\big|x_A(y_S - y_E) + x_S(y_S - y_A) + x_E(y_A - y_S)\big| \\ &= \frac{1}{2}|x_S \cdot y_E| = \frac{1}{2}\left|\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2}\right| = \frac{1}{12}|ab|. \end{aligned}$$

Аналогно се добија:

$$P_{ASB} = \frac{1}{6}|ab|, \quad P_{BSC} = \frac{1}{3}|ab|,$$

$$P_{ESCD} = P_{ABCD} - (P_{ASE} + P_{ASB} + P_{BSC}) = \frac{5}{12}|ab|.$$

Следи да је

$$P_{ASE} : P_{ASB} : P_{BSC} : P_{ESCD} = \frac{1}{12} : \frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{5}{12} = 1 : 2 : 4 : 5.$$

Задатак 3. Квадрати $ABCD$ и $CEFG$ имају тачку C заједничку. Доказати да тежишна дуж CK троугла CBE и висина CL троугла DCG припадају истој правој, тј. тачке K, C и L су колинеарне.

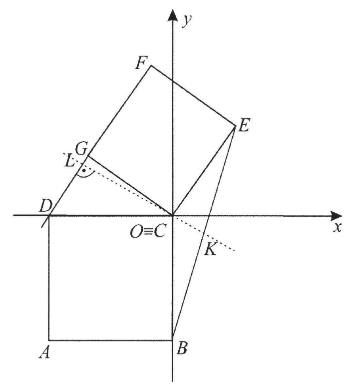
Рјешење. Нека се у правоуглом координатном систему xOy тачка C налази у координатном почетку O, страница CD припада негативном дијелу Ox осе, а страница CB припада негативном дијелу Oy осе. Тада тачке A, B, D и E имају редом координате $A(-a,-a)$, $B(0,-a)$, $D(-a,0)$ и $E(b,c)$, гдје је a дужина странице квадрата $ABCD$, а b и c су такви позитивни бројеви да је дужина странице квадрата $CEFG$ једнака $\sqrt{b^2+c^2}$ (сл. 6).

Ако тачка G има координате (x_G, y_G), тада из нормалности правих CG: $y = \dfrac{y_G}{x_G}\,x$ и CE: $y = \dfrac{c}{b}\,x$ закључујемо да је $\dfrac{y_G}{x_G}\cdot\dfrac{c}{b} = -1$, односно $y_G = -\dfrac{b}{c}\,x_G$.

Сада из $CG = \sqrt{b^2+c^2}$ добијамо

$$\begin{aligned} b^2+c^2 = CG^2 = x_G^2 + y_G^2 &= x_G^2 + \frac{b^2}{c^2}\,x_G^2 \\ &= \frac{b^2+c^2}{c^2}\,x_G^2, \end{aligned}$$

одакле је $1 = \dfrac{x_G^2}{c^2}$, па следи $x_G = -c$ јер је $x_G < 0$.



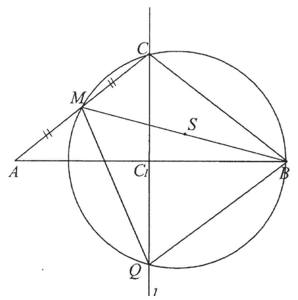
Слика 6

Коначно имамо да је $y_G = b$ па је $G(-c, b)$. Тачка K је средиште дужи BE па има координате $K\left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{c-a}{2}\right)$. Посматрајмо сада коефицијенте правца правих KC и DG. Они су дати са $k_{KC} = -\dfrac{a-c}{b}$, $k_{DG} = \dfrac{b}{a-c}$. Како је $k_{KC}\cdot k_{DG} = -1$, то су праве KC и DG међусобно нормалне, што значи да висина CL троугла DCG припада правој KC, тј. тачке K, C и L су колинеарне, а то је и требало доказати.

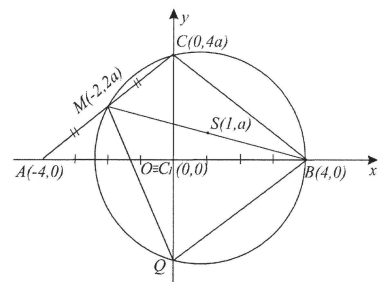
Задатак 4. (Осма јуниорска БМО, Нови Сад, 2004. године) Нека је троугао ABC једнакокрак, $AC = BC$, нека је тачка M средиште дужи AC, и нека је l права која пролази кроз тачку C, а нормална је на праву AB. Кружница кроз тачке B, C и M сијече праву l у тачкама C и Q. Изразити полупречник круга описаног око троугла ABC преко $m = CQ$.

Рјешење. Пошто је права l, гдје $C \in l$, нормална на праву AB, то је $\angle ACQ = \angle BCQ$, тј. $\angle MCQ = \angle BCQ$ (сл. 7). Ови углови су периферијски над луковима $\overparen{MQ}$ и $\overparen{BQ}$ па су и они једнаки међу собом, а одавде слиједи да је такође $MQ = BQ$. Ако је тачка S средиште дужи BM, тада из чињенице да је $MQ = BQ$ слиједи да је $\triangle MSQ \cong \triangle BSQ$ (ССС), па је $\angle MSQ = \angle BSQ = 90^\circ$, тј. $SQ \perp MB$.

Уведимо сада правоугли координатни систем xOy тако да је тачка C_1, средиште странице AB, у координатном почетку O и нека је $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(0,4a)$ и $C_1(0,0)$ (сл. 8).



Слика 7



Слика 8

Тачка S је средиште дужи BM. Тада је $M(-2,2a)$, $S(1,a)$. Овдје ћемо користити једначину праве кроз двије тачке (x_1,y_1), (x_2,y_2) која гласи

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Добијамо да је једначина праве MB: $y = -\frac{a}{3}x + \frac{4a}{3}$. Права SQ је нормална на праву MB па је $k_{SQ} \cdot k_{MB} = -1$. Пошто је $k_{MB} = -\frac{a}{3}$, то слиједи да је $k_{SQ} = \frac{3}{a}$, а како тачка S припада правој SQ, то је SQ: $y = \frac{3}{a}x + a - \frac{3}{a}$. Пресјек праве SQ и осе Oy је тачка Q. Ако у једначину праве SQ уврстимо $x = 0$, добијамо да је $y = a - \frac{3}{a}$ па имамо $Q\Big(0, a - \frac{3}{a}\Big)$. Сада је

$$CQ = 4a - \Big(a - \frac{3}{a}\Big) = 3\,\frac{a^2+1}{a}. \tag{1}$$

Површина троугла ABC једнака је $P = \frac{1}{2}\,AB \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4a = 16a$, а $AC \cdot BC \cdot AB = BC^2 \cdot AB = (16 + 16a^2) \cdot 8$. Сада из формуле $P = \frac{abc}{4R}$ добијамо

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{(16+16a^2)\cdot 8}{4 \cdot 16a} = 2\,\frac{a^2+1}{a} \overset{(1)}{=} \frac{2}{3}CQ = \frac{2}{3}\,m.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[2] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD i Element, Zagreb, 1994.

[4] П.С. Моденов, *Задачи по геометрии*, Наука, Москва, 1979.

[5] Matematičko-fizički list, HMD, brojevi 186,209,219,248, Zagreb.

[6] Časopis "Triangle", Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, Vol.5 (2001/2002), No.3 i No. 4.

Природно-математички факултет, Сарајево

E-mail: `basicamar@gmail.com`