Др Милосав Марјановић

ПРЕДЛОГ ПРОГРАМА ЗА КУРС МАТЕМАТИКЕ НА УЧИТЕЉСКИМ ФАКУЛТЕТИМА

Овај наш чланак треба узимати заједно са нашим другим чланком: *Какав треба да буде курс математике на учитељским факултетима*, Настава математике, LIX, 1-2, 2014, 30–37, `elib.mi.sanu.ac.rs/journals/nm`, који је један критички осврт на постојеће програме математике на овим факултетима. Узмимо као правило да наставник математике који предаје тај предмет на одређеном нивоу мора бити упознат са математичким садржајима који се излажу на ступњу који претходи и оном који следи иза тог нивоа. У случају учитеља, кога сматрамо да је и наставник математике у млађим разредима основне школе, то би значило познавање садржаја предшколске математике и оних садржаја који се обрађују у старијим разредима основне школе. Тако се истиче као један од битних задатака курса математике на учитељским факултетима, да студенти морају да овладају садржајима основношколске математике на један врло темељан начин, уз концептуално продубљивање тих садржаја, стављајући оперативну увежбаност у другом плану. (Увек је шире али површније знање математике мање корисно од ужег али темељнијег).

Као важан други задатак курса математике, истакнимо такође, да тај курс треба да помогне студенту да добро овлада оним садржајима који су битни за успешно праћење курса дидактике математике тј. оног његовог централног дела где се анализирају начини како се математичко знање синтетизује у млађим разредима основне школе.

Садржаји као што су теорија скупова, математичке структуре и математичка логика илуструју дух савремене математике, па поред тога што културивишу студента, такође ће му служити да као наставник, стручно и критички прати програме математике и начине како се настава реализује ослањањем на постојеће уџбенике и друга дидактичка средства. То ће га такође чинити равноправним саговорником у стручним активима у својој школи и шире.

Предлажући овај програм, ми смо укупни садржај разбили на теме, а сваку од наведених тема прати текст у коме се истиче зашто је садржај те теме релевантан. Уз то, у таквом тексту такође се сугерише приступ обради садржаја те теме и даје број часова који би за то био коришћен. Узимајући у обзир специфичност овог курса, мислимо да вежбе морају бити добрим делом усмерене да се обнове садржаји основношколске математике, нарочито они у старијим разредима.

За разлику од постојеће поделе на Математику I (прва два семестра) и Математику II (трећи и четврти семестар, а чији садржај ми сматрамо да је непотребан за ову врсту студената), ми имамо у виду курс математике заступљен са 2 Ђ 2 часа недељно у току прва три семестра. Наш би био предлог да се у четвртом семестру уведе као посебан предмет курс статистике и теорије вероватноће, заступљен са 2 Ђ 1 часом недељно. Ми нећемо предлагати садржаје тог курса, сем што бисмо били слободни да сугеришемо да би он требало да буде попут оних у емпиријским дисциплинама и са фокусом на вештину практичног праћења и разматрања наставних процеса. Тако се укупни број часова предавања и вежби који су сад намењени курсевима Математике I и Математике II не би мењао, а не би се мењало ни место математичких предмета у наставном плану учитељских факултета. На крају, напоменимо и то да је изражена тенденција да се садржаји везани за статистику све више уносе у школске програме и да је томе посвећена обилна стручна литература.

1. Историјски преглед развоја основних математичких идеја

1.1. Математика у Вавилону.

1.2. Математика у Египту. Ахмесов папирус.

1.3. Стара грчка (хеленска) математика. Јонска школа. Питагорејска школа. Атинска школа: Хипократ из Хиоса, Платон, Еудокс. Александријска школа: Еуклид, Архимед, Аполон из Перга, Ератостен. Три чувена проблема грчке математике.

1.4. Развој аритметике. Увођење у Европу индо-арапског начин писања бројева и његова предност у односу на друге пре тога постојеће системе.

1.5. Развој алгебре. Проблем решавања једначина степена већег од 2. Виетова *logistica speciosa.* Декартов модел осе као носиоца система реалних бројева и његова аналитичка геометрија. Историјат основних ознака и формирање симболичке алгебре. Аксиоматизација алгебре (Џ. Пикок, А. Де Морган).

(6 часова предавања и 6 часова вежби)

Релевантност садржаја. Овај историјски садржај је везан за основношколски програм математике (укључујући ту и више разреде). Обухвата преглед развоја идеје броја кроз векове, од природних до реалних бројева. Обухвата кризни период појаве несамерљивих величина, Еудоксово схватање броја као односа истородних магнитуда, доминацију Еуклидових Елемената, значај Виетове идеје о промењивој као кључним појмом алгебре и Декартов допринос развоју идеје о реалном броју.

Историјски развој геометрије обухвата детаљно приказивање стварања пре-Еуклидске геометрије, што је опет везано за школске садржаје те дисциплине у осмогодишњој школи.

Поређењем реторичке и симболичке алгебре студент ће увидети значај симболичке алгебре као система који убрзава мишљење и скраћује изражавање речима.

Иначе мислимо да историјски садржај треба свести на оквир који одговара наставном садржају који се реализује у нижим разредима основне школе, а да учитељ мора такође бити добро упознат и са садржајем на следећем нивоу (тј. у овом случају са садржајима математике у вишим разредима основне школе). Томе ставу и одговара овај избор тема из историје математике.

2. Елементи теорије скупова

2.1. Кратак историјски осврт на формирање теорије скупова. Скуп као најопштији појам класичне математике.

2.2. Однос скуп – елемент. Начини задавања скупова: скупови на опажајном нивоу, скупови чији су елементи конвенцијални симболи (цифарски записи, слова, речи). Скупови тачака и Venn-ови диаграми. Универзални скуп и њему кореспондентна променљива. Задавање скупова предикатски (истицањем карактеристичних својстава њихових елемената). Фамилије скупова. Russell-ов парадокс.

2.3. Односи међу скуповима: скуповна једнакост, подскуп, надскуп. Скуповне операције: унија и пресек коначне фамилије скупова, разлика два скупа, комплемент. Празан скуп.

2.4. Уређени пар, уређена тројка и уређена n-торка. Директни производ два и коначног броја скупова. Директни производи скупа R реалних бројева, $R \times R$ – раван и $R \times R \times R$ – тродимензиони простор.

2.5. Релације, домен и кодомен релације. Релација поретка и релација еквиваленције. Функција (пресликавање), својства „*један-један* (1–1)“ и „*на*“. Инверзна функција.

2.6. Комбинаторика; варијације n-те класе, варијације без понављања, пермутације, комбинације.

(8 часова предавања и 8 часова вежби)

Релевантност садржаја. За садржаје наставне теме „Елементи теорије скупова“ можемо рећи да они описује феноменологију на којој се ослања значење у аритметици. Термин „скуп на опажајном нивоу“ односи се на разне групе објеката у реалном окружењу које опажамо непосредно или представљајући их путем слика. Опажајући такву групу објеката и апстрахујући (занемарујући):

(i) њихову природу (врсту) и

(ii) било какав вид њиховог организовања,

формира се у нашем уму идеја броја (Cantor-ов принцип инваријантности броја). Овај принцип изражава природну зависност генезе појма броја од перцепције скупова на опажајном нивоу.

Само значење рачунских операција развија се кроз контакт деце са низом ситуација у којима се то значење јасно пројектује. Тако се у уму детета формирају одговарајуће когнитивне схеме, које у дидактици математике такође описујемо користећи језик теорије скупова.

Сабирању и одузимању претходи перцепција адитивне схеме коју чине два дисјунктна скупа. Ако су m и n бројеви елемената тих скупова а s је број елемената њихове уније, тада

- кад су m и n дати, а тражи се s, говоримо о задатку сабирања који прати дату адитивну схему,

- а кад су су s и један од бројева m или n дати, а тражи се други од њих, говоримо о задатку одузимања који прати дату адитивну схему.

Слично, мултипликативну схему чини фамилија од m дисјунктних, једнакобројних скупова сваки од којих има n елемената. Нека је p број елемената уније скупова ове фамилије. Тада

- кад су дати бројеви m и n, а тражи се број p, говоримо о задатку множења који прати дату мултипликативну схему,
- а кад је дат број p и један од бројева m или n а тражи се други од њих, говоримо о задатку дељења који прати дату мултипликативну схему.

Гледано генералније, мултипликативну схему чини директни производ фамилије n скупова чији је број елемената редом m_1, m_2, ... , m_n. Број елемената овог производа је $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$, па се тако производ три и више бројева интерпретира као кардиналност овог производа скупова.

Појам функције прожима све конкретне садржаје математике, па је битно да се путем рекапитулације тај појам детаљно обради у овом курсу математике. Посебно је значајно развијање идеје о промењљивој, које почиње у раној настави аритметике са коришћењем слова у тој улози.

Наведени садржаји комбинаторике најјасније се обрађују везивањем за појам функције, односно појам n-низа. Иначе ти се садржаји претпостављају као основа за обраду елемената теорије вероватноће.

3. Елементи математичке логике

3.1. Искази (пропозиције). Речи „истинит“, „лажан“. Терми (изрази) и формуле (релације).

3.2. Исказне (пропозиционе) функције. Истиносни скуп. Еквивалентност исказних функција (једнакост истиносних скупова).

3.3. Логичка функција речи „*и*“ и „*или*“. Логичке операције: конјункција и дисјункција. Негација. Логичка функција везника „*ако* ... *тада* ... “. Импликација.

3.4. Значење израза „за сваки“, „за неки“. Таутологије и правила закључивања.

(8 часова предавања и 8 часова вежби)

Релевантност садржаја. Језик математичке логике је уопштење језика алгебре: алгебарски изрази, релације (формуле са релацијским знаком (једначине и неједначине)), а у логици: изрази (терми), предикати (пропозиционе функције (формуле и са логичким знаковима). Семантика се веже за теорију скупова: пропозиционој функцији се придружује истиносни скуп, две пропозиционе функције су еквивалентне кад су им придружени скупови једнаки. Тако схваћена, еквиваленција представља релацију (а не операцију) у класи пропозиционих функција. Логичке операције конјункција и дисјункција вежу се за своје истиносне скупове који су пресек, односно унија истоносних скупова компоненти тих операција. Истиносни скуп негације је комплемент истиносног скупа пропозиционе функције која се негира у односу на универзални скуп њене промењљиве.

Овај приступ логици, чија је семантика везана за теорију скупова, природнији је од оног више формалног који почиње са појмом исказа и са таблицама којим се одређује логичка вредност операција на класи исказа. Посебно, овај приступ има предност кад се имају у виду студенти учитељских факултета, за које је битно прецизно изражавање и разумевање значења сложених реченица које се формирају помоћу везника „*и*“, „*или*“, „*ако* ... *тада* ... “.

Ова тема се завршава обрадом основних таутологија за које се везују правила закључивања: правило одвајања (*modus ponens*), правило силогизма, правило замене и др.

У нижим разредима основне школе нема дедуктивног закључивања, него се математичке истине индукују непосредним опажањем (и запажањем), па потом правилно формулишу. Али у старијим разредима почињу дедукције (кад се из тачности једних попозиција закључује тачност других). За ову врсту студената битно је продубљено познавање садржаја математике виших разреда основне школе, а што је један од најбитнијих задатака курса математике на учитељским факултетима. Том продубљивању служе и елементи математичке логике у овом програму.

4. Главни садржаји школске алгебре

4.1. Линеарна једначина $ax + b = 0$ и линеарне неједначине: $ax + b < 0$, $(ax + b \leqslant 0)$, $ax + b > 0$, $(ax + b \geqslant 0)$. Факторизација полинома $ax^2 + bx + c$. Квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$ и квадратне неједначине: $ax^2 + bx + c < 0$ (и оне кад се у претходној неједначини знак $<$ замени једним од знакова $>$, $\leqslant$, $\geqslant$).

4.2. Координатни систем у равни. Реалне функције реалне промењиве и њихови графици: линеарна функција $y = ax + b$, квадратна функција $y = ax^2 + bx + c$, корена функција $y = \sqrt{x + a}$, $y = \sqrt{a - x}$). Неједначине: $y < ax + b$ (и оне кад се у претходној неједначини знак $<$, замени једним од знакова $\leqslant$, $>$, $\geqslant$) и скупови тачака у равни који су њихова решења.

(4 часа предавања и 4 часа вежби)

Релевантност садржаја. Бројевна оса и раван са координатним системом служе да се разни алгебарски услови вежу за одговарајуће геометријско значење. Линеарна и квадратна функција са кореснодентним једначинама и неједначинама представљају важан садржај школске алгебре који треба да буде темељно обновљен (а ипак се налази ван програма математике за осмогодишње школе). Уз обнављање правила рада са једнакостима и неједнакостима овде се користе и релације $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ и $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$. Напоменимо такође да ови садржаји могу, делимично (или потпуно) да буду обновњени уз друге теме где се за то укаже потреба.

5. Математичке структуре

5.1. Схватање математичке структуре као скупа чији су елементи на одређен начин организовани. Примери структура: скупови са релацијом поретка, скупови са операцијама, скупови са релацијама које класификују њихове елементе у дисјунктне подскупове.

5.2. Алгебарске структуре: група, прстен, поље, уређено поље. Поље рационалних и поље реалних бројева.

5.3. Изоморфизам и инваријанте.

(6 часова предавања и 6 часова вежби)

Релевантност садржаја. Смисао организовања елемената неког скупа схватати као издвајање уређених парова или уређених тројки тог скупа. Два скупа са организованим елементима су изоморфни кад постоји обострано једнозначно пресликавање које чува издвојене парове односно тројке.

Код обраде алгебарских структура треба навести главне примере као што су прстен целих бројева, поље комплексних бројева, поље рационалних бројева (виђено као минимално уређено поље, поље реалних бројева (виђено као јединствено поље које задовољава аксиому непрекидности.

Из аксиома уређеног поља следе сва позната оперативна својства рачунања са бројевима. Нека од тих својстава извести (али и не претеривати с тим). Доказати својство уређеног поља: $(\forall x \neq 0)\, x \cdot x > 0$, па то карактеристично својство уређених поља користити да се докаже да се поље комплексних бројева не може уредити.

Ова тема је значајна да се бројевни системи појме дубље и да се бројеви као најважнији објекти математике усвоје, усвајањем и њихових операционих својстава.

6. Аналитичка геометрија у равни

6.1. Неједнакости које представљају полуравни на које координатне осе разбијају раван и парови неједнакости које одређују квадранте. Конвексне комбинације две тачке и скуп који оне одређују. Симетрија $(x, y) \mapsto (y, x)$.

6.2. Једначина праве и неједначине чија су решења полуравни на које права разбија раван. Каноничке једначине елипсе, параболе и хиперболе и неједначине чија су решења области на које ове криве разбијају раван.

(4 часа предавања и 4 часа вежби)

Релевантност садржаја. Метода координата везује алгебарске изразе и релације за њихово геометријско значење. То алгебарској симболици даје значење па су зато ови садржаји посебно инструктивни за студенте учитељских факултета. (Напоменимо да „видети“ у многим језицима значи и „разумети“). И ова тема може да буде делимично обновљена и уз друге садржаје, рецимо кад се у логици пропозиционим функцијама додељују њихови истиносни скупови.

7. Топологија, пројективна геометрија и Еуклидска геометрија

7.1. Раван R^2 и простор R^3 са координатним системима и растојањем између тачака. Непрекидна пресликавања. Неједнакост

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \leqslant |x_1 - x_2| + |y_2 - y_2| + |z_1 - z_2|.$$

7.2. Изометрија. Метричка својства. Подударност. Конструкције лењиром и шестаром. Елементи који одређују троугао. Транслација, ротација и симетрија. Хомотетија и сличност. Еуклидска својства. Једна рекапитулација главних садржаја геометрије у вишим разредима основне школе.

7.3. Тополошка еквиваленција. Тополошка својства. Интуитивно поимање тополошке еквиваленције као поступне непрекидне деформације. Тополошки лук, тополошки круг и тополошка сфера.

7.4. Euler-Poincaré-ова карактеристика и њено рачунање у случају линија и површи. Оријентабилне и неоријентабилне површи.

7.5. Пројектовање из тачке. Пројективна својства. Пројективна права. Колинеарност три тачке као пројективно својство.

7.6. Интервал као најкраћи тополошки лук (најкраћи пут између две тачке). Права као линија чија је закривљеност нула и круг као линија која је подједнако закривљена у свакој својој тачки. Геометријски круг као линија која од свих тополошких кругова исте дужине захвата највећу површину.

(6 часова предавања и 6 часова вежби)

Релевантност садржаја. Према експерименталним налазима J. Piaget-а, деца од опажајних карактеристика видљивих објеката прво формирају она која су тополошка по карактеру, па затим она која су пројективна и најзад Еуклидска (тј. и метричка). Тако је од интереса да се студенти учитељских факултета упознају са математичким значењем ових карактеристика, третирајући их у амбијенту простора R^3.

За тополошку класификацију објеката у R^3 дефинишу се непрекидна пресликавања. Ипак тополошка еквивалентност се схвата интуитивно, као поступне непрекидне деформације објеката у R^3 без преклапања њихових тачака. Отворене и затворене линије из геометрије у првом разреду основне школе, уствари су појмови тополошког лука и тополошког круга. Euler-Poincaré-ова карактеристика је једно врло стабилно својство објеката, а оно је посебно интересантно због могућности директне провере да се чува при непрекидним деформацијама.

У амбијенту простора R^3, помоћу пројекција из тачке дефинише се пројективна еквиваленција и тиме и пројективна својства објеката у том простору. Тако су појмови „троугао“, „четвороугао“ пројективни а нису, нпр, „једнакокраки троугао“ или „правоугаоник“. Колинеарност тројки тачака је важно пројективно својство.

Екстремална својства интервала и геометријског круга издвајају ове правилне објекте као посебно значајне. Закривљеност се третира као промена правца тангенте дуж датог лука.

Ова тема је такође прилика да се обнове најважнији садржаји геометрије у вишим разредима основне школе.

САНУ, Београд, Кнеза Михаила 35
E-mail: milomar@beotel.rs