Душан Ј. Симјановић, Ненад О. Весић

ПРОСТ БРОЈ У СЛОЖЕНИМ ЗАДАЦИМА

Број текуће године се редовно јавља у задацима на такмичењима, некада у формулацији задатка а некада као решење. Како је број 2017 прост, састављачима задатака наредне године неће бити лако да га укомпонују у задатке које предлажу. У овом чланку дајемо неке примере како се то може учинити.

Задатак 1. *Израчунати*

$$a = \frac{2017}{201720172017^2 - 201720172016 \cdot 201720172018}.$$

Решење. Нека је $x = 201720172017$. У том случају је

$$a = \frac{2017}{x^2 - (x-1)(x+1)} = \frac{2017}{x^2 - x^2 + 1} = 2017.$$

Задатак 2. *Да ли је број* $n = 2017 + 2017^{2016} + 2018^{2016} + 2019^{2016}$ *прост или сложен?*

Решење. Како је

$$\begin{cases} 2017 \equiv_5 2, \\ 2017^{2016} \equiv_5 \left(2^4\right)^{504} \equiv_5 1, \\ 2018^{2016} \equiv_5 \left(3^4\right)^{504} \equiv_5 1, \\ 2019^{2016} \equiv_5 \left(4^4\right)^{504} \equiv_5 1, \end{cases}$$

то је $n \equiv_5 2 + 1 + 1 + 1 \equiv_5 0$ па је број n сложен.

Задатак 3. *Колики је остатак при дељењу броја*

$$\eta = (1!)^{2016^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} + (2!)^{2016^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} + \cdots + (2016!)^{2016^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} + (2017!)^{2016^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}$$

са 2017?

Решење. С обзиром на то да је 2017 прост број то су, за свако $k \in \mathbf{N}$, $k < 2017$, бројеви k и 2017 узајамно прости. На основу тога следи да су и бројеви $k!$ и 2017 узајамно прости.

На основу мале Фермаове теореме, која каже да уколико је a цео а p прост број и уколико су a и p узајамно прости бројеви онда је $a^{p-1} \equiv_p 1$, следи да је за сваки природан број $k < 2017$ испуњена конгруенција $(k!)^{2016^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} =$

$\Big(\dots\big((k!)^{2016}\big)^{2016}\dots\Big)^{2016} \equiv_{2017} 1$. Како је још и $(2017!)^{2016^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{1}}}}}} \equiv_{2017} 0$, то следи да је

$$\eta \equiv_{2017} \underbrace{1+1+\cdots+1}_{2016 \text{ јединица}} + 0 = 2016,$$

па је тражени остатак једнак 2016.

Задатак 4. *Одредити целе бројеве x, y, z који су решења једначине*

$$2017^x + 2017^y = 2017^z.$$

Решење. Због симетричности ове једначине по x и y општост неће бити умањена уколико претпоставимо да је $x \geqslant y$. Даље, како је

$$2017^z = 2017^x + 2017^y > 2017^x,$$

то следи да је $z > x \geqslant y$. Дељењем леве и десне стране ове једначине са 2017^y добијамо да потенцијална решења x_0, y_0, z_0 те једначине задовољавају једнакост

$$1 = 2017^{z_0-y_0} - 2017^{x_0-y_0}. \tag{1}$$

Разликујемо наредна два случаја:

1° $x_0 = y_0$. У овом случају једнакост (1) своди се на

$$2 = 2017^{z_0-y_0}.$$

Десна страна ове једнакости је паран а лева непаран број што доказује да у овом случају једначина из задатка нема решења.

2° $x_0 > y_0$. У овом случају једнакост (1) своди се на

$$1 = 2017^{z_0-y_0} - 2017^{x_0-y_0}$$

што не може бити задовољено с обзиром на то да је десна страна, за разлику од леве стране последње добијене релације, дељива простим бројем 2017.

На основу претходног следи да тражени бројеви x, y, z не постоје.

Задатак 5. *Колико је највише чланова низа $a_n = \dfrac{n}{2017}$ могуће сабрати тако да је добијени збир мањи од 1010?*

Решење. Важи

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2017} + \frac{2}{2017} + \cdots + \frac{n}{2017} = \frac{1}{2 \cdot 2017} n(n+1) < 1010.$$

Одатле следи да је $n(n+1) < 4074340$ па, због $2017 \cdot 2018 = 4070306$ и $2018 \cdot 2019 = 4074342$, закључујемо да је могуће сабрати највише 2017 чланова низа a_n.

Задатак 6. *Ако за функцију $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ важи да је*

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

и $f(1) = 1009$, одредити $f(2017)$.

Решење. Како је

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) = n^2 f(n),$$
$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1),$$

следи да је $f(n) = \dfrac{n-1}{n+1} f(n-1)$, одакле се, вишеструком применом ове релације, добија да важи

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n-1}{n+1} f(n-1) = \frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n} f(n-2) = \cdots \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)n \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3} f(1) = \frac{2}{n(n+1)} f(1). \end{aligned}$$

Како је $f(1) = 1009$, добијамо да је $f(2017) = \dfrac{1}{2017}$.

Задатак 7. [Последња воља једног математичара] *Драги моји синови, остављам вам у наследство 2017 златника и желим да их поделите на два дела на следећи начин:*

- *Да свако од вас двојице добије по 1008 златника и један део 2017. златника.*
- *Да свако од вас двојице добије исту вредност наследства.*

Ако у томе успете, наследство је ваше.

Помозимо синовима да, на равне части, поделе новце.

Решење. Нека је вредност k-тог златника z_k једнака v_k, $k = 1, \ldots, 2017$, и нека је

$$v_{2017} \geqslant v_{2016} \geqslant \ldots \geqslant v_2 \geqslant v_1 > 0.$$

Издвојимо златник z_{2017}, а осталих 2016 златника поделимо браћи на следећи начин:

$$B_1 = \{z_1, z_3, z_5, \ldots, z_{2015}\},$$
$$B_2 = \{z_2, z_4, z_6, \ldots, z_{2016}\}.$$

Нека су V_1 и V_2 укупне вредности златника смештених у скупове B_1 и B_2, редом. Важи да је

$$\begin{aligned} 0 \leqslant V_2 - V_1 &= v_{2016} - v_{2015} + v_{2014} - v_{2013} + \cdots + v_2 - v_1 \\ &= v_{2016} - (v_{2015} - v_{2014}) - \cdots - (v_3 - v_2) - v_1 \\ &\leqslant v_{2016} - v_1 < v_{2016} \leqslant v_{2017}. \end{aligned}$$

На основу претходног следи да је златник z_{2017} могуће поделити на два дела z^1_{2017} и z^2_{2017} чије су вредности

$$v^1_{2017} = \frac{1}{2}\big(v_{2017} + V_2 - V_1\big) \text{ и } v^2_{2017} = \frac{1}{2}\big(v_{2017} - V_2 + V_1\big).$$

Наследство треба поделити на следећи начин:

$$B^*_1 = B_1 \cup \{z^1_{2017}\} \text{ и } B^*_2 = B_2 \cup \{z^2_{2017}\},$$

чиме смо помогли браћи како да наследе свога оца математичара.

Задатак 8. *Ако различита слова одговарају различитим, а иста слова истим цифрама, одредити непознате цифре тако буде задовољена, посебно, свака од наредних једнакости:*

$$\overline{AAA} + \overline{ABA} + \overline{ACC} = 2017, \tag{2}$$

$$\overline{ABBA} + \overline{CDC} = 2017, \tag{3}$$

$$2017 + \overline{ABA} = \overline{CDDC}. \tag{4}$$

Решење. Решимо проблем једнакости (2). Мора да важи да је $A = 6$ јер би, у супротном, збир на левој страни једнакости био мањи од 1800 или већи од 2100. Одатле следи да је $666 + \overline{6B6} + \overline{6CC} = 2017$ односно $\overline{10B} + \overline{11C} = 145$, одакле јасно следи да је $B = 9$ и $C = 5$.

Што се проблема датог у једнакости (3) тиче, очигледно је $A = 1$ и $C = 6$, одакле добијамо да је $\overline{1BB1} + \overline{6D6} = 2017$, односно $\overline{11B} + D = 41$. Одатле јасно следи да је $B = 3$ и $D = 8$.

Још треба одредити цифре A, B, C, D тако да једнакост (4) буде задовољена. Очигледно је $C \in \{2, 3\}$. Размотримо оба случаја:

1° $C = 2$. У овом случају је $2017 + \overline{ABA} = 2DD2$, одакле је $A = 5$. Одатле следи да је $2522 + \overline{10B} = \overline{2DD2}$, односно $D \in \{5, 6\}$. Одатле, због различитости слова A и D следи да је $D = 6$ па је јасно да, у овом случају, не постоје цифре A, B, C, D које задовољавају једнакост (4).

2° $C = 3$. У овом случају је $2017 + \overline{ABA} = 3003$, односно $\overline{ABA} = 986$ што није решење овог проблема.

Задатак 9. *Одредити различите природне бројеве a, b, c, d, e, f, g такве да је*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{2017}.$$

Решење. Важи једнакост

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{72} + \frac{1}{108} + \frac{1}{216} = 1.$$

Дељењем претходне једнакости са 2017 долазимо до закључка да је

$$a = 4034,\ b = 6051,\ c = 24204,\ d = 36306,\ e = 145224,\ f = 217836,\ g = 435672.$$

Задатак 10. *Са леве стране нетачне једнакости*

$$7777777777777777777 = 2017,$$

на неким местима између седмица, уметнути знаке основних рачунских операција без коришћења заграда тако да једнакост буде тачна.

Решење. Дајемо три решења датог проблема:

- $777 + 777 + 777 - 77 - 77 - 77 - 77 - 7 + 7 : 7 = 2017$,
- $7777 : 7 + 7777 : 7 - 77 - 77 - 7 \cdot 7 - 7 : 7 - 7 : 7 = 2017$,
- $7777 : 7 + 777 + 77 + 7 \cdot 7 + 7 : 7 + 7 : 7 + 7 : 7 - 7 + 7 = 2017$.

Задатак 11. *Дат је разломак* $\dfrac{5215}{91u6}$, *где је u непозната цифра. Ако бројиоцу додамо и од имениоца одузмемо број x добија се разломак* $\dfrac{2}{7}$. *Одредити број x.*

Решење. Збир бројиоца и имениоца у разломку $\dfrac{5215}{91u6}$ мора бити дељив са $2+7=9$, па је непозната цифра u једнака 7. Сада, из једначине $\dfrac{5215-x}{9176+x}=\dfrac{2}{7}$ добијамо да је $x=2017$.

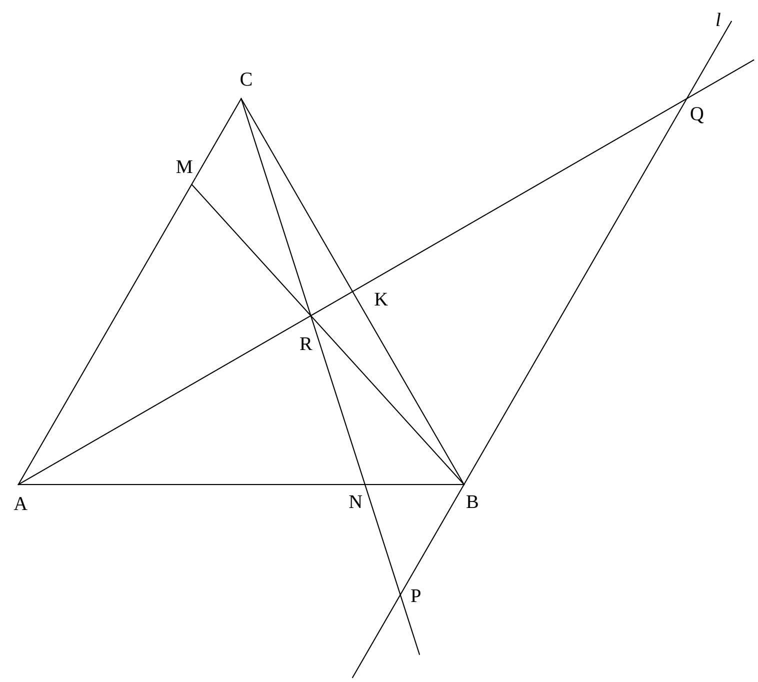
Задатак 12. *Свака страница једнакостраничног троугла подељена је тачкама на 2017 једнаких дужи. Свако теме троугла спојено је дужима са тачкама поделе на наспрамној страници. Затим су означене све тачке пресека тих дужи у унутрашњости троугла. Колико има означених тачака?*

Решење. Нека је дужина странице троугла једнака 2017 и нека су A_i, B_i, C_i, $i = 1, \ldots, 2016$, тачке поделе страница BC, AC, AB, редом, такве да је

$$BA_i = CB_i = AC_i = i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, 2016\}.$$

Докажимо да међу повученим дужима не постоје три које се секу у једној тачки.

Претпоставимо супротно, тј. да постоје тачке $A_{k_0} = K, B_{m_0} = M, C_{n_0} = N$ тако да се праве одређене дужима AK, BM, CN секу у тачки R. Нека је још и права l, која садржи тачку B, паралелна правој AC. Означимо са P и Q пресеке правих CN и AK са правом l.



Сл. 1. Троугао $\triangle ABC$ и претпостављене праве AK, BM и CN

На основу паралелности правих l и AC закључује се да су задовољене наредне једнакости међу угловима:

- Углови $\measuredangle PBN \equiv \measuredangle BPR$ и $\measuredangle NAC \equiv \measuredangle RCM$ су једнаки као углови са паралелним крацима док су углови $\measuredangle BNP$ и $\measuredangle ANC$ једнаки као унакрсни.
- Углови $\measuredangle BQK \equiv \measuredangle BQR$ и $\measuredangle KAC \equiv \measuredangle RAM$ су једнаки као углови са паралелним крацима док су углови $\measuredangle BKQ$ и $\measuredangle AKC$ једнаки као унакрсни.
- Углови $\measuredangle PRB$ и $\measuredangle MRC$ су једнаки као унакрсни. Такође, и углови $\measuredangle BRQ$ и $\measuredangle MRA$ су једнаки као унакрсни.

На основу прве две једнакости углова, а по ставу сличности (УУ), доказане су наредне две сличности троуглова:

$$\triangle BNP \sim \triangle ANC \text{ и } \triangle BQK \sim \triangle CAK.$$

На основу тих сличности следи да је задовољено:

$$\left.\begin{aligned} \frac{BP}{AC} = \frac{BN}{AN} = \frac{2017-n}{n}, \\ \frac{BQ}{AC} = \frac{BK}{CK} = \frac{k}{2017-k} \end{aligned}\right\} \text{ одакле следи } \frac{BP}{BQ} = \frac{(2017-n)(2017-k)}{nk}.$$

На основу трећих, од претходно наведених, једнакости углова следи да су, по ставу сличности (УУ) задовољене и наредне сличности:

$$\triangle PBR \sim \triangle AMR \text{ и } \triangle BRQ \sim \triangle MRQ.$$

На основу те две сличности закључујемо да важи

$$\frac{BP}{CM} = \frac{BR}{MR} \text{ и } \frac{BQ}{MA} = \frac{BR}{RM}. \tag{5}$$

На основу претходне две једнакости следи да је

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{CM}{AM} = \frac{m}{2017-m}. \tag{6}$$

На основу једнакости (5) и (6) закључујемо да је задовољено:

$$mnk = (2017-m)(2017-n)(2017-k),$$

тј. $2mnk = 2017^3 - 2017^2(m+n+k) + 2017(mn+nk+km)$. Одатле следи да прост број 2017, већи од бројева $2, m, n, k$, задовољава релацију $2017 \mid 2mnk$ што је контрадикција. Дакле, међу повученим дужима не постоје три које се секу у једној тачки.

Дужи AA_i и BB_j, BB_i и CC_j, CC_i и AA_j, $i, j = 1, \ldots, 2016$, секу се у унутрашњости троугла. Заиста, нека се дужи AK и BM (Слика 1) секу у тачки R. Како важе распореди тачака $\mathcal{B}(A, M, C)$ и $\mathcal{B}(C, K, B)$ (по конструкцији) то на основу Пашовог става [9] примењеног на троугао $\triangle AKC$ следи да важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, R, K)$, па се тачка R налази у унутрашњости троугла $\triangle ABC$.

Број пресека дужи из сваког од претходних парова једнак је 2017^2 па је укупан број означених тачака једнак $3 \cdot 2017^2$.

Задатак 13. *Дат је скуп B који је сачињен од 2017 бројева b_i, $i = 1, \dots, 2017$. Израчунати производ $b_1 b_2 \dots b_{2017}$ уколико је познато да ако би се сваки од бројева b_i заменио збиром*

$$\beta_i = b_1 + \cdots + b_{i-1} + b_{i+1} + \cdots + b_{2017}$$

добио би се скуп бројева $\{\beta_1, \dots, \beta_{2017}\} = B$.

Решење. Нека је збир бројева b_i, $i = 1, \dots, 2017$, једнак S. У том случају је $\beta_i = S - b_i$. С обзиром на услов који је наведен у задатку долази се до закључка да важе једнакости

$$S = b_1 + \cdots + b_{2017} = \beta_1 + \cdots + \beta_{2017} = 2017S - (b_1 + \cdots + b_{2017}) = 2016S,$$

одакле следи да је $S = 0$.

На основу претходног следи да је $\beta_i = S - b_i = -b_i$ па долазимо до закључка да ако је број b елемент скупа B онда и број $-b$ припада том скупу. С обзиром на то да је $2017 \in 2\mathbf{N} + 1$, а по Дирихлеовом принципу, следи да постоји елемент b_{i_0} скупа B тако да је $b_{i_0} = -b_{i_0}$, односно $b_{i_0} = 0$. Одатле следи да је тражени производ једнак нули.

Задатак 14. *Решити једначину*

$$\frac{x-1009}{1008} + \frac{x-1013}{1004} + \frac{x-1017}{1000} + \frac{x-1021}{996} + \frac{x-1025}{992} + \frac{x-1029}{988} + \frac{x-1033}{984}$$
$$= \frac{x-1000}{1017} + \frac{x-1100}{917} + \frac{1150}{867} + \frac{x-1190}{827} + \frac{x-1213}{804} + \frac{x-1231}{786} + \frac{x-1240}{777}.$$

Решење. Додавањем сваком од сабирака (укупно 7 њих) на левој страни по 1 и додавањем сваком од сабирака (укупно 7 њих) по 1 на десној страни дата једначина постаје еквивалентна једначини

$$(x-2017)\Big(\frac{1}{1008} + \frac{1}{1004} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{996} + \frac{1}{992} + \frac{1}{988} + \frac{1}{984}\Big)$$
$$= (x-2017)\Big(\frac{1}{1017} + \frac{1}{917} + \frac{1}{867} + \frac{1}{827} + \frac{1}{804} + \frac{1}{786} + \frac{1}{777}\Big),$$

односно једначини

$$\frac{11584080873167}{6540249521000}(x-2017) = \frac{18210742316815}{8770606332911},$$

чије је једино решење $x_1 = 2017$.

Задатак 15. *Одредити сва реална решења једначине*

$$2017^x + 2034144^x = 2034145^x. \tag{7}$$

Решење. Лако се проверава да је задовољена једнакост

$$2017^2 + 2034144^2 = 2034145^2,$$

па је $x_0 = 2$ једно од решења једначине (7).

Дељењем једначине (7) са 2034145^x добија се да је та једначина еквивалентна једначини

$$\Big(\frac{2017}{2034145}\Big)^x + \Big(\frac{2034144}{2034145}\Big)^x = 1.$$

Размотримо следеће случајеве.

1° $x<2$. Како је $\dfrac{2017}{2034145}<\dfrac{2034144}{2034145}<1$ то следи да је

$$\Big(\frac{2017}{2034145}\Big)^x+\Big(\frac{2034144}{2034145}\Big)^x<\Big(\frac{2017}{2034145}\Big)^2+\Big(\frac{2034144}{2034145}\Big)^2=1,$$

па једначина (7) нема решења мањих од 2.

1° $x>2$. Аналогним поступком као у претходном случају долазимо до закључка да је

$$\Big(\frac{2017}{2034145}\Big)^x+\Big(\frac{2034144}{2034145}\Big)^x>\Big(\frac{2017}{2034145}\Big)^2+\Big(\frac{2034144}{2034145}\Big)^2=1,$$

па једначина нема решења ни у овом случају.

Дакле, једино реално решење једначине (7) је $x_0=2$.

Пре наредних задатака, подсетимо се неких већ добијених резултата и покушајмо да их допунимо. У раду [7], мотивисано начином решавања једначина приказаним у раду [12], доказано је да за произвољне различите реалне бројеве $A,B\in(0,1]$, или $A,B\in[1,+\infty)$, једначина $B^x-A^x=(B-A)x$ по x има тачно два решења $x_1=0$ и $x_2=1$. Осим тога, очито је да је у случају $A=B>0$ сваки реалан број x решење претходне једначине. Логично се намеће питање колико решења има једначина

$$A^x+B^x=(A+B)x, \tag{8}$$

за реалне бројеве $A,B\in(0,1]$ односно $A,B\in[1,+\infty)$. У другом случају је $x_0=1$ једно од очигледних решења али постоји и друго решење $x_1>1$ које није толико лако добити као у раду [7]. Због тога ћемо се задржати на случају $A,B\in(0,1]$.

У случају када је барем један од бројева A и B мањи од 1 функција $F(x)=A^x+B^x$ јесте, због $A,B\in(0,1]$, строго опадајућа док је функција $G(x)=(A+B)x$, због $A+B>0$, строго растућа. Једначина (8) заправо има облик

$$F(x)=G(x). \tag{9}$$

У случају када је $A=B=1$ једначина (8) се своди на

$$1^x+1^x=2x,$$

чије је једино решење $x_0=1$.

Докажимо да постоји највише једна вредност x_0 која је решење једначине (9), тј. (8) у случају када је барем један од бројева A и B мањи од 1. Претпоставимо да постоје две вредности x_{0_1} и x_{0_2}, $x_{0_1}<x_{0_2}$, такве да је $F(x_{0_1})=G(x_{0_1})$ и $F(x_{0_2})=G(x_{0_2})$. У том случају, важиће наредне једнакости као и неједнакост међу њима:

$$G(x_{0_1})=F(x_{0_1})>F(x_{0_2})=G(x_{0_2}),$$

што је контрадикција (како је $G(x)$ растућа функција онда би требало да важи $G(x_{0_1})<G(x_{0_2})$).

Са друге стране, важи да је $F(1) = G(1)$ па је $x_0 = 1$ једино решење једначине (8) у овом случају.

Задатак 16. *У скупу реалних бројева решити једначину*

$$2017^{\frac{1}{2}x} + 2017^{\frac{3}{2}x} = \frac{2034145}{8205738913}x.$$

Решење. Уведимо смену $y = -\frac{x}{2}$. Једначина из овог задатка добија облик

$$\Big(\frac{1}{2017}\Big)^y + \Big(\frac{1}{2017^3}\Big)^y = \frac{4068290}{8205738913}y.$$

С обзиром на то да важи једнакост

$$\frac{1}{2017} + \frac{1}{2017^3} = \frac{4068290}{8205738913},$$

и с обзиром на то да $\dfrac{1}{2017}, \dfrac{1}{2017^3} \in (0,1]$, то следи да је $y = 1$ једино решење трансформисане једначине. Одатле пак директно следи да је $x = -2$ једино решење једначине задате у овом задатку.

Задатак 17. *На сегменту* $[0, \pi/2]$ *решити једначину*

$$\sin^{2017} x + \cos^{2017} x = 2017\sqrt{2}\ \cos\big(x - \frac{\pi}{4}\big).$$

Решење. Приметимо најпре да $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ нису решења ове једначине. За $x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ испуњене су неједнакости $0 < \sin x, \cos x < 1$. Осим тога, важе и наредне једнакости:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\big(\frac{\pi}{4} - x\big) = \sqrt{2}\cos\big(\frac{\pi}{4} - x\big).$$

Једначина из овог задатка уз коришћење парности функције $\cos x$, а на основу претходних једнакости, добија облик

$$\big(\sin x\big)^{2017} + \big(\cos x\big)^{2017} = 2017(\sin x + \cos x),$$

одакле следи да је број 2017 решење једначине облика (8), при чему је $A = \sin x$ и $B = \cos x$, што је контрадикција. Одатле следи да ова једначина нема решења.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, Математички факултет, Београд, 2004.

[2] М. Ашић и др., *Међународне математичке олимпијаде*, Материјали за младе математичаре, свеска 11, ДМС, Београд 1986.

[3] В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, *Припремни задаци за математичка такмичеа средошколаца у Србији*, Материјали за младе математичаре, свеска 49, 2-го изд, ДМС, Београд 2011.

[4] Ђ. Баралић, *300 припремних задатака за јуниорске математичке олимпијаде: искуство Србије*, Клет, Београд 2014.

[5] З. Каделбург, П. Младеновић, *Савезна такмичења из математике*, Материјали за младе математичаре, свеска 23, ДМС, Београд 1990.

[6] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре, свеска 15, 5. изд, ДМС, Београд, 2013.

[7] А. Б. Симић и др., *Задаци са бројем 2016*, Математика и информатика 3 (2) (2016), 17–29.

[8] Д. Ј. Симјановић, Н. О. Весић, *Занимљиви алгебарски задаци са бројем 2012*, Настава математике, LVII, 1-2 (2012), 45–51.

[9] М. Митровић и др., *Геометрија за први разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2000.

[10] Р. Тошић, *Математички проблеми '97: 365 задатака са решењима са разних такмичења у свету*, Архимедес, Нови Сад, 1997.

[11] Н. О. Весић, *Имитација, манир и стил у математици*, МАТаа-КОЛ, XXII (3) (2016), 149–163.

[12] Н. О. Весић, Д. Ј. Симјановић, *Још један приступ решавању једначина у скупу реалних бројева*, Настава математике, LVI, 3-4 (2011), 18–22.

[13] Математички лист, XXXII-3, ДМС, Београд, 1997.

[14] Математички лист, XXXIII-3, ДМС, Београд, 1999.

[15] Математички лист, XLVI-4, ДМС, Београд, 2012.

[16] Математички лист, XLVIII-5, ДМС, Београд, 2014.

[17] Математички лист, XLIX-3, ДМС, Београд, 2015.

[18] *Тангента 10*, Збирка задатака објављених у рубрици „Задаци из математике" часописа *Тангента* 1995–2005. године, Материјали за младе математичаре, свеска 45, ДМС, Београд 2006.

Д.Ј.С.: Природно-математички факултет у Нишу, Универзитет Матрополитан (Центар у Нишу)
E-mail: dsimce@gmail.com

Н.О.В.: Природно-математички факултет у Нишу, Пројекат 174012 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије