НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXII, 1 (2017), 1–8

Др Милосав М. Марјановић

ОБРАДА ДЕЉЕЊА – ЈЕДНО СИСТЕМАТСКО ТРАГАЊЕ ЗА ТАЧНИМ ЦИФРАМА

Апстракт. Дељење чији је дељеник мањи од десетоструке вредности делитеља назива се канонично и знамо да се сваки поступак дељења разбија на низ каноничних. Код извођења каноничних дељења $A : B$ вишецифрених бројева, ми предлажемо методу заокругљивања делитеља B нагоре, повећавајући његову другу цифру за 1, а све следеће цифре замењујући нулама и дељеника A заокругљивањем надоле, замењујући нулама тај исти број као код делитеља његових крајњих цифара. Дељење овако заокругљених бројева A и B своди се на канонично дељење двоцифреним бројем. То дељење продукује број који представља тачну цифру или број који је за 1 мањи од броја који представља тачну цифру. Ова чињеница је доказана у нашем раду Division – A Systematic Search for True Digits, The Teaching of Mathematics, XVIII, 2, (2015), pp. 84–92 и представља основу за методу коју овде предлажемо.

Наша метода представља алгоритам којим се једнозначно одређују тачне цифре (без уобичајених нагађања и кориговања тих нагађања), а овај чланак је скица дидактичке обраде те методе.

1. Увод

Пишући овај чланак помишљали смо да га насловимо „Научите да делите“, мислећи на све могуће заинтересоване, а посебно на наставнике разредне наставе и наставнике математике у основној и средњој школи. Наиме, алгоритми којима се из датих цифарских записа компонентних бројева за збир, разлику, преоизвод и количник добија цифарски запис вредности тих израза функционише једнозначно сем у случају дељења, кад се тачна цифра „нагађа“ и после провере врше се потребне корекције, а што овај поступак чини компликованим, посебно кад су дељеник и делитељ велики бројеви. Оваква нагађања врше се на основу импровизованог заокругљивања дељеника и делитеља, а што представља посебни проблем недовољно увежбаним ученицима. Такође такав поступак извођења операције дељења узрок је слабије обраде те теме, па она најчешће остаје готово потпуно необрађена у току укупне наставе математике.

Нека запис $A : B$ представља дељење, где је A *дељеник* а B *делитељ*. Назовимо такво дељење *каноничким* кад је $A < 10 \cdot B$. Сам поступак дељења састоји се из поређења дељеника A са умношцима $0 \cdot B$, $1 \cdot B$, $2 \cdot B$, ... , $10 \cdot B$ и кад је k такав једноцифрени број да је $k \cdot B \leqslant A < (k+1) \cdot B$, k је тражени количник односно представља *тачну цифру.* Као што је добро познато сваки поступак дељења разбија се на низ каноничких дељења која су основна за извођење овог поступка у корацима. Поређење насумице дељеника A са умношцима делитеља

B никуд не води, па је наш циљ да овде прикажемо једно систематско трагање за тачним цифрама.

Поменуто трагање је налажење алгоритма (поступка) који ће једнозначно одређивати тачне цифре, а који је заснован на нашим радовима Division – A Systematic Search for True Digits, The Teaching of Mathematics, 2005, vol. VIII, 2, pp. 89–101 и Division – A Systematic Search for True Digits II, The Teaching of Mathematics, 2015, vol. XVIII, 2, pp. 84–92 (`elib.mi.sanu.ac.rs/journals/tm`). Осврћући се на ове радове говорићемо наш први односно наш други рад о дељењу. Изражавајући се слободније, наш главни резултат је доказ чињенице да ће се у случају каноничког дељења вишецифрених бројева (и без обзира како су велики компонентни бројеви) после заокругљивања нагоре делитеља и заокругљивања надоле дељеника поступак дељења свести на канoничко дељење двоцифреним бројем којим ће се добијати тачна цифра или број тачно за 1 мањи од броја кога та цифра представља. Напоменимо да су сви резултати наведених радова врло елементарни али их овај аутор сматра битним прилогом al-Khwarizmi-јевој математици. Читаоцу се препоручује да се упозна са овим радовима али, ипак, за праћење садржаја овог чланка, у коме се скицира дидактичка тема дељење, то није неопходно.

Напоменимо да је Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780–c. 850) персијски математичар чије оригинално дело посвећено аритметици и писано на арапском није сачувано али је сачуван његов латински превод из 12. столећа. Тај превод није имао наслов па се на њега осврталo коришћењем првих двеју речи из његовог текста Dixit Algorizmi (Тако је говорио ал-Кваризми). Та је књига послужила да се Европа упозна са индо-арапским системом записивања бројева и рачунања са њима. Од латинизараног имена ал-Кваризми потекао је математички термин алгоритам.

Напоменимо да наш програм предвиђа обраду четири рачунске операције почев са прва два разреда основне школе. У том периоду настава је везана за блок бројева до 20, а потом блок бројева до 100. У том раном периоду нема много правог рачунања али то је врло суптилни период кад ове операције стичу своје трајно значење. На овом нивоу наставе начин усвајања знања иде путем обраде великог броја примера. Наиме, деца се активно укључују у разраду већег броја примера који најчешће имају форму питања уплетених у разне ситуације из свакодневног живота. Као резултат тих активности менталне слике и схеме формирају се у уму детета и као формиране оне представљају основу за коју се везује перманентно значење ових операција. За представу о томе шта се дешава у овом периоду наставе, читалац се упућује на серију наших чланака: Један приступ извођењу наставе аритметике I, II, III, IV и V, штампаних у Настави Математике, LVII, 3-4 (2012), с. 1–13; LVIII, 1-2 (2013), с. 1–13; LVIII, 3-4 (2013), с. 1–13; LIX, 4 (2014), с. 1–16: LX, 1–2 (2015), с. 1–16.

Описивање схема везаних за аритметичке операције врши се коришћењем језика теорије скупова, фиксирајући тако тип примера намењених развијању значења ових операција. У случају множења и дељења, одговарајућа схема је фамилија од m дисјунктних скупова сваки од којих има n елемената. Такву фамилију скупова називамо *мултипликативна схема.* Нека је p број елемената уније скупова који припадају овој фамилији. Кад су m и n дати а тражи се p, говоримо о *задатку множења* који прати дату мултипликативну схему. Кад су p и m (респ. n) дати а тражи се n (респ. m), говоримо о *задатку дељења* који прати ту мултипликативну схему. У првом случају кад су дати p и m а тражи се n такав задатак дељења назива се *партиција* (раздвајање), а у другом, кад су p и n дати а тражи се m, тај задатак дељења назива се *квотација* (количковање).

Наши програми математике за трећи и четврти разред основне школе налажу обраду поступака којим се изводе четири рачунске операције. Некад се настава математике у основној школи сводила на увежбавање ових поступака без труда да се они разумеју јер су ретко били јасни и учитељима. Данас се трудимо да их обрадимо уз разумевање, поступно и плански.

Посебно је важно формирање оних знања која чине *трајни усмени фонд.* Ту спада таблица сабирања и та иста таблица кад је у функцији одузимања, то јест кад из датог збира два једноцифрена броја и једног од њих, користимо је да видимо који је други од тих бројева. Циљ обраде ове теме је да се увежба усмено извођење свих улаза у ову таблицу (кад се сабира и кад се одузима) без коришћења њеног записивања.

Уз множење у тај фонд улази таблица множења, док уз дељење захтева се увежбано усмено дељење са остатком: бројем 2 бројева до 19, бројем 3 бројева до 29, ..., бројем 9 бројева до 89 и бројем 10 бројева до 99. Ово су све канонична дељења бројевима 2, 3, ..., 9 и 10. Тако је први корак у обради теме извођења дељења, обрада ових дељења са остатком на чему се нећемо овде задржавати, већ упућујемо читаоца на наш пети чланак из серије у Настави математике (V, LX, 1-2 (2015), p. 1–16) где је то обрађено са свим потребним детаљима.

2. Дељење једноцифреним бројевима и декадним јединицама

Дељења једноцифреним бројем разбијају се на низ једноставних каноничких дељења, као што то следећи примери илуструју:

$$\text{(a)}\quad \text{(i)}\ \begin{array}{l} 87:6=14\\ \underline{6}\\ 27\\ \underline{24}\\ \ \ 3 \end{array} \qquad \text{(ii)}\ \begin{array}{l} 864:5=172\\ \underline{5}\\ 36\\ \underline{35}\\ \ \ 14\\ \ \ \underline{10}\\ \ \ \ \ 4 \end{array} \qquad \text{(iii)}\ \begin{array}{l} 5358:7=65\\ \underline{49}\\ \ \ 45\\ \ \ \underline{42}\\ \ \ \ \ 38\\ \ \ \ \ \underline{35}\\ \ \ \ \ \ \ 3 \end{array}$$

Пишући једнакости, као што су на пример, $17234 = 1723 \cdot 10 + 4$, $17234 = 172 \cdot 100 + 34$, $17234 = 17 \cdot 1000 + 234$ итд. у виду записа којим се изражава дељење са остатком, имаћемо

$$\begin{array}{l}\underline{17234}:10=1723,\\ \quad\ 4\end{array} \qquad \begin{array}{l}\underline{17234}:100=172,\\ \quad 34\end{array} \qquad \begin{array}{l}\underline{17234}:1000=17,\\ \quad 234\end{array} \qquad \text{итд.}$$

Напоменимо да се, према нашим програмима, дељење једноцифреним бројем обрађује у трећем разреду у оквиру блока бројева до 1000 где може да се лепо иконички илуструје путем бројевних слика. Нема ничега суптилног да бисмо се даље задржавали на дељењу једноцифреним бројевима. Овај поступак дељења не преноси се на случајеве дељења вишецифреним бројевима па самим тим не заслужује више пажње.

3. Каноничка дељења двоцифреним бројем

Добро извођење ових дељења је од великог значаја и зато треба да тече без икаквих двоумљења. У том смислу прво ћемо описати методу заокругљивања дељеника и делитеља, која се неће примењивати у следећа два тривијална случаја:

(i) кад је дељеник мањи од делитеља и кад је тада количник 0, и

(ii) кад дељеник није мањи од дељитеља и кад су они двоцифрени бројеви који имају исту почетну цифру и кад је тада количник 1.

У даљим разматрањима искључиваћемо ове тривијалне случајеве.

Посматрајмо сад случај каноничког дељења кад је делитељ двоцифрен. Први корак у извођењу овог дељења почиње заокругљивањем, делитеља нагоре повећавањем његове прве цифре за 1 и заменом његове друге цифре са 0; а дељеника надоле заменом његове задње цифре са 0. Такво се дељење одмах редукује на каноничко дељење једноцифреним бројем. А тако добијени количник биће прва процена тачне цифре, а ако већ није тачна цифра, дељење се наставља и биће лакше, са знатно мањим дељеником.

Пре него што ћемо навести одговарајуће примере, рецимо да ћемо исказе, на пример, као што су: „4 иде у 27, 6 пута“, „21 иде у 22, 1 пут“ итд, скраћивати пишући: „4 у 27: 6“, „21 у 22: 1“, итд.

(b) (i) $271 : 31 = 6$,	4 у $27 : 6$	(ii) $85 : 21 = 2$,	3 у $8 : 2$	(iii) $179 : 22 = 5$,	3 у $17 : 5$
$\underline{186}$	$\underline{2}$	$\underline{42}$	1	$\underline{110}$	2
85	8, 4 у $8 : 2$	43	$\underline{1}$, 3 у $4 : 1$	69	$\underline{1}$, 3 у $6 : 2$
$\underline{62}$		$\underline{21}$	4	$\underline{44}$	8
23		22	21 у $22 : 1$	25	22 у $25 : 1$
		$\underline{21}$		$\underline{22}$	
		1		3	

Уместо настављања свођења на дељење једноцифреним бројем, могли смо то скратити и у другом кораку усмено одредити садржавања: 31 у 45: 1, (усмено поређење: $1 \cdot 31 < 45 < 31 + 31 = 62$); 21 у 43: 2, (у.п: $2 \cdot 21 = 42 < 43 < 42 + 21 = 63$); 22 у 69: 3, (у.п: $3 \cdot 22 = 66 < 69 < 66 + 22 = 88$).

Према једном резултату из нашег другог рада о дељењу, после првог корака у поступку оваквог дељења преостаје, одузимањем од дељеника, број који је мањи од 200, а кад је прва цифра делитеља 9, 8, 7 или 6, количник може бити највише 2, а кад је 5 или 4 он је највише 3, док кад је та цифра 3 или 2, количник је највише 4. Значи сва дељења која преостају у другом кораку су једноставна и лака за усмено извођење. Ево таквих примера

(c) (i)
$$\begin{array}{rl} 170 : 22 = 5, & 3 \text{ у } 17 : 5 \\ \underline{110} & \underline{3} \\ 69 & 8, \ 22 \text{ у } 69 : 3 \\ \underline{66} & \\ 3 & \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rl} 587 : 94 = 5, & 10 \text{ у } 55 : 5 \\ \underline{470} & \underline{1} \\ 117 & 6, \ 94 \text{ у } 117 : 1 \\ \underline{94} & \\ 23 & \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{rl} 419 : 52 = 6, & 6 \text{ у } 41 : 6 \\ \underline{312} & \underline{2} \\ 107 & 8, \ 52 \text{ у } 107 : 2 \\ \underline{104} & \\ 3 & \end{array}$$

За увежбавање усменог поређења могу се, у почетку, узети случајеви кад су оба, дељеник и делитљ двоцифрени. (Кад се двоцифрени број усмено множи једноцифреним изгледа да је лакше множити десетице а затим јединице и потом те производе сабирати. Нпр. $3 \cdot 27 = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 60 + 21 = 81$, итд).

Ево примера:

(d) (i)
$$\begin{array}{l} 81 : 41 = 1 \\ \underline{41} \\ 40 \end{array}$$
$(1 \cdot 41 < 81 < 41 + 41 = 82)$

(ii)
$$\begin{array}{l} 96 : 31 = 3 \\ \underline{93} \\ \ \ 3 \end{array}$$
$(3 \cdot 31 = 93 < 96 < 93 + 31 = 124)$

(iii)
$$\begin{array}{l} 87 : 35 = 2 \\ \underline{70} \\ 17 \end{array}$$
$(2 \cdot 35 = 70 < 87 < 70 + 35 = 105)$

(iv)
$$\begin{array}{l} 91 : 38 = 2 \\ \underline{76} \\ 15 \end{array}$$
$(2 \cdot 38 = 76 < 91 < 76 + 38 = 114)$

(v)
$$\begin{array}{l} 94 : 28 = 3 \\ \underline{84} \\ 10 \end{array}$$
$(3 \cdot 28 = 84 < 94 < 84_28 = 112)$

(vi)
$$\begin{array}{l} 78 : 22 = 3 \\ \underline{66} \\ 12 \end{array}$$
$(3 \cdot 22 = 66 < 78 < 66 + 22 = 88)$

Напоменимо да кад се дељитељ завршава нулом, његова прва цифра се не повећава за 1. Поступа се као у следећим примерима:

$$\begin{array}{l} 712 : 80 = 8, \ 8 \text{ у } 71 : 8, \\ \underline{640} \\ \ \ 72 \end{array} \quad \begin{array}{l} 399 : 60 = 6, \ 6 \text{ у } 39 : 6, \\ \underline{360} \\ \ \ 39 \end{array} \quad \begin{array}{l} 378 : 50 = 7, \ 5 \text{ у } 37 : 7, \ \text{итд.} \\ \underline{350} \\ \ \ 28 \end{array}$$

На крају рецимо да се ова дељења могу изводити и усменим путем уз извесно кориговање и поновно тражење умножака делитеља, а то се кориговање смањује са стицањем рутине. Међутим ми то не постављамо као циљ који се мора остварити па вежбе те врсте не укључујемо него само наводимо пар примера. У даљем, главна сврха ових дељења је одређивање тачне цифре не водећи тада рачуна шта је остатак. Дакле она су садржавања а не потпуна дељења. Ево примера те врсте: 42 у 284 : 6, (у.п: $6 \cdot 42 = 252 < 284 < 252 + 42 = 294$); 79 у 521 : 6, (у.п: $6 \cdot 79 = 474 < 521 < 474 + 79 = 553$); 81 у 582 : 7, ($7 \cdot 81 = 567 < 582 < 567 + 81 = 648$), итд.

4. Дељење вишецифрених бројева

Почнимо једним примером да се подсетимо како дељење вишецифрених бројева тече.

(e) $616352 : 824 = 748$	Издвајамо прво канонично дељење $6163 : 824$.
$\underline{5768}$	Процењујемо: 824 у $6163 : 7$
3955	Процењујемо: 824 у $3955 : 4$
$\underline{3296}$	
6592	Процењујемо: 824 у $6592 : 8$
$\underline{6592}$	
0	

Могли бисмо рећи све је лако, кад се не бисмо запитали како су добијене тако прецизне процене, тј. како смо нашли 7 процењујући да је $7 \cdot 824 < 6163 < 8 \cdot 824$, 4 процењујући да је $4 \cdot 824 < 3955 < 5 \cdot 824$ и 8 процењујући да је $8 \cdot 824 = 6592$.

Видимо да се дељење у примеру под (e) разбија на три канонична дељења $6163 : 824$, $3955 : 824$ и $6592 : 824$, а иначе свако дељење се разбија на низ каноничких дељења.

Код дељења је једина права вештина одређивање тачних цифара, а то постижемо редуцирајући дата канонична дељења, заокругљивањем делитеља повећавајући му другу цифру за 1, а све следеће замењујући нулом, а затим заокругљивањем и дељеника тим истим бројем нула. У примеру под (e), заокругљивањем каноничких дељења добијамо: $6160 : 830$, $3950 : 830$ и $6590 : 830$, а та се дељења своде на: $616 : 83$, $395 : 83$ и $659 : 83$. Делећи у овим случајевима онако како је то изложено у одељку 3, долазимо директно до тачних цифара.

(e') (i) $6163 : 824 = 7$	Рачунамо са стране:	$616 : 83 = 6$		9 у $61 : 6$
$\underline{5768}$		$\underline{498}$	$\underline{1}$	
395		118	7	83 у $118 : 1$
		$\underline{83}$		
		35		
(ii) $3955 : 824 = 4$		$395 : 83 = 4$		9 у $39 : 4$
$\underline{3296}$		$\underline{332}$		
659		63		

$$\begin{array}{lllll} \text{(iii)} & 6592 : 824 = 7 & & 659 : 83 = 7 & 9 \text{ у } 65 : 7 \\ & \underline{5768} & \underline{1} & \underline{581} & \\ & 824 & 8 & 78 & \text{Наставља се дељење: } 824 \text{ у } 824 : 1 \\ & \underline{824} & & & \\ & 0 & & & \end{array}$$

Примењено заокругљивање давало нам је тачну цифру у случајевима (e')(i) и (e')(ii) док нам у случају (e')(iii) даје број који је за 1 мањи од броја који представља тачну цифру. А ово заокругљивање имаће исти тај ефект без обзира како велики били бројеви који се деле, тј. даваће тачну цифру или број за 1 мањи од броја који она представља. На основу цифарских записа, канонично дељење се препознаје кад цифарском запису делитеља допишемо 0 на крају па је тај број већи од дељеника. На пример сва следећа дељења су канонична: $87 : 23$, $999 : 100$, $356 : 588$, $17564 : 4764$, $7624436 : 818967$, итд.

Нека је $A : B$ канонично дељење где су A и B вишецифрени бројеви. Кад се B заокругли нагоре повећавајући његову другу цифру за 1 и замењујући све остале које иза ње следе нулама, а A се заокругли надоле замењујући нулама исти број његових крајњих цифара, то дељење се своди на канонично дељење двоцифреним бројем. Количник који се добије кад се ово сведено дељење обави представља тачну цифру за дато дељење $A : B$ или је то број који је само за 1 мањи од броја који представља та тачна цифра. Ова чињеница је доказана у нашем другом раду о дељењу и представљаће основу за методу дељења коју у овом одељку приказујемо. Напоменимо и овде да ову методу не примењујемо у следећа два тривијална случаја: првом, кад је A мање од B и тачна цифра је 0 и другом, кад није A мање од B, али кад имају исти број цифара и исту прву цифру, кад ће тачна цифра бити 1.

Наведимо неколико примера каноничких дељења вишецифрених бројева, где ћемо кореспондентна дељења двоцифреним бројем изводити усмено (што није за ученике али јесте за наставнике).

$$\begin{array}{lll} \text{(f)} & \text{(i)} & 84275 : 32451 = 2, \ \ 33 \text{ у } 84 : 2 \\ & & \underline{64902} \\ & & 19373 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(ii)} & 6534 : 1283 = 5, \ \ 13 \text{ у } 65 : 5 \\ & \underline{6415} \\ & 119 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(iii)} & 81248 : 13139 = 5, \ \ 14 \text{ у } 81 : 5 & \\ & \underline{65695} & \underline{1} \\ & 15553 & 6 \\ & \underline{13139} & \\ & 2414 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(iv)} & 103011 : 11993 = 8, \ \ 12 \text{ у } 103 : 8 \\ & \underline{95944} \\ & 7067 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(v)} & 2894512 : 413291 = 6, & 42 \text{ у } 289 : 6 \\ & \underline{2479746} & \underline{1} \\ & 414766 & 7, \ \ 413291 \text{ у } 424766 : 1 \\ & \underline{413291} & \\ & 1475 & \end{array}$$

Кад су све цифре делитеља почев са трећом 0, непотребно је његову другу цифру повећавати за 1. Наведимо и за то примере:

$$\begin{array}{l} 2416 : 390 = 6, \quad 39 \text{ у } 241 : 6, \\ \underline{2048} \\ 368 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 47543 : 6100 = 7, \quad 61 \text{ у } 475 : 6 \\ \underline{42700} \\ 4843 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 643357 : 78000 = 8, \quad 78 \text{ у } 643 : 8 \\ \underline{624000} \\ 19357 \end{array}$$

На крају наведимо неколико примера дељења која нису канонична, иако ту нема ничега битног, јер се она своде на канонична. Издвајање првог каноничког дељења почиње издвајањем у дељенику онолико почетних цифара колико их има делитељ. Ако је тај број кога одређују издвојене цифре једнак или већи од делитеља, он ће са делитељем чинити то почетно дељење, а ако је мањи издваја се још једна цифра дељеника па ће те издвојене цифре чинити број који се дели у првом кораку.

(g) (i)
$$\begin{array}{lll} 291812 : 374 = 770, & & 38 \text{ у } 291 : 7 \\ \underline{2618} & \underline{1} & \\ 3001 & 780 & 38 \text{ у } 300 : 7 \\ \underline{2618} & & \\ 383 & & 374 \text{ у } 383 : 1 \\ \underline{374} & & \\ 92 & & 374 \text{ у } 92 : 0 \\ \underline{0} & & \\ 92 & & \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ll} 1799383 : 4921 = 365, & 50 \text{ у } 179 : 3 \\ \underline{14763} & \\ 32308 & 50 \text{ у } 323 : 6 \\ \underline{29526} & \\ 27823 & 50 \text{ у } 278 : 5 \\ \underline{24605} & \\ 3218 & \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{ll} 41328850 : 50102 = 824, & 51 \text{ у } 413 : 8 \\ \underline{400816} & \\ 124725 & 51 \text{ у } 124 : 2 \\ \underline{100204} & \\ 245210 & 51 \text{ у } 245 : 4 \\ \underline{200408} & \\ 44802 & \end{array}$$

Рецимо на крају, све ово је лако, зар не?

Завршимо примедбом да са већим степеном увежбаности сва рачунања која се изводе са стране могу се изводити усмено. Но до које мере то увежбавање треба да иде зависиће од сваког појединачног наставника и његовог или њеног разреда. Наш циљ је био да скицирамо (а не да потпуно разрадимо са свим детаљима) план постепене обраде поступка дељења који овде предлажемо.

E–mail: `milomar@beotel.rs`