НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXII, 1 (2017), 22–25

Др Бранислав Боричић

СКУПОВНА АНАЛИЗА АРИСТОТЕЛОВИХ СИЛОГИЗАМА

1. Уводни пример

Када смо разматрали употребу дијаграматског закључивања у логици и теорији скупова (в. [2]), као један од примера, навели смо аргументацију исправности једног случаја аристотеловског силогистичког закључивања помоћу Ојлеровог[1] дијаграма. У том смо чланку разматрали суптилне разлике између система дијаграма које су развијали Ојлер, Вен[2] и Перс[3] (в. [1, 2, 4, 6]). Познавање тих детаља неће бити неопходно за разумевање овог чланка у којем ћемо успоставити непосредне везе између реченичних форми теорије Аристотеловог категоричког силогизма, неких класа формула предикатског рачуна језика првог реда и одговарајућих скуповних релација. Имајући у виду адекватно представљање скуповних операција и релација Ојлер-Веновим дијаграмима (в. [2]), практично ћемо омогућити читаоцу да сваку силогистичку дилему успешно разреши помоћу дијаграма. Приступ који ћемо овде следити биће од користи такође у решавању једне класе типичних задатака који се појављују у тестовима за пријем на више нивое студија или на неке врсте послова на којима се захтева изражена способност логичког закључивања.

Започећемо једним уводним примером. Пођимо од следеће две претпоставке:

(P1) Сваки плИнк је плАнк.

(P2) Неки плОнк је плИнк.

Анализираћемо следеће могуће закључке:

(Z1) Неки плАнк је плОнк.

(Z2) Неки плИнк није плОнк.

(Z3) Ниједан плОнк није плАнк.

Рад на овом чланку је делом финансирало Министарство за науку и технологију Републике Србије, пројекат број 179005.

[1] Leonhard Euler (1707–1783), славни европски математичар, физичар и астроном, швајцарског порекла

[2] John Venn (1834–1923), британски математичар и логичар

[3] Charles Sanders Peirce (1839–1914), амерички математичар, логичар и филозоф

(Z4) Неки плОнк није плИнк.

(Z5) Постоје бар један плАнк, бар један плИнк и бар један плОнк.

Уколико са A, I и O, редом, означимо скупове свих плАнкова, плИнкова и плОнкова, претпоставке ћемо моћи да запишемо, редом, као: (P1) $I \subseteq A$ и (P2) $O \cap I \neq \emptyset$, и под овим условима за скупове A, I и O, размотримо нужност задовољења понуђених закључака. Закључак (Z1) $A \cap O \neq \emptyset$ свакако нужно следи из датих претпоставки, док би се за закључак (Z2) $I \setminus O \neq \emptyset$ могло рећи да не следи нужно, али да је могућ, у смислу да се може навести пример када су задовољене обе претпоставке и сам закључак. За разлику од случаја (Z2), закључак (Z3) $O \cap A = \emptyset$ апсолутно није ни могућ, што значи да не постоји ниједна ситуација у којој би биле задовољене обе претпоставке и овај закључак, који би, иначе, директно противречио закључку (Z1). Однос (Z4) $O \setminus I \neq \emptyset$, мада не нужан, могућ је, док закључак (Z5) $A \neq \emptyset$, $I \neq \emptyset$ и $O \neq \emptyset$, нужно следи из наших претпоставки.

2. Скуповна интерпретација основних реченичних форми

У уводном примеру смо демонстрирали неколико типичних ситуација из теорије Аристотеловог категоричког силогизма. Наиме, ова теорија се бави искључиво међусобним односима универзално-афирмативних (у традиционалној ознаци A), партикуларно-афирмативних (I), универзално-негативних (E) и партикуларно-негативних (O) категоричких реченичних форми:

A : Сваки F је G.

I : Неки F је G.

E : Ниједан F није G.

O : Неки F није G.

које, редом, имају следеће формалне записе у језику унарних предиката првог реда[4]:

$$
\begin{aligned}
AFG &: \quad \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \\
IFG &: \quad \exists x(F(x) \wedge G(x)) \\
EFG &: \quad \forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x)) \\
OFG &: \quad \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))
\end{aligned}
$$

уз следећу скуповну интерпретацију:

$$
\begin{aligned}
AFG &: \quad \boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{G} \\
IFG &: \quad \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} \neq \emptyset \\
EFG &: \quad \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} = \emptyset \\
OFG &: \quad \neg(\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{G})
\end{aligned}
$$

где смо са $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$, редом, означили скупове $\{x \mid F(x)\}$ и $\{x \mid G(x)\}$.

[4] Језик логике предиката првог реда подразумева присуство симбола за предикате било које коначне дужине, који се интерпретирају као релације одговарајуће дужине, што значи и могућност појављивања већег броја променљивих и квантора у једној формули, као на пример $\exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$. Стога, ограничавање на симболе унарних предиката у теорији категоричког силогизма представља битно сужење језика првог реда.

3. Традиционална Аристотелова силогистика

Претходницу класичној логици предиката представља Аристотелова теорија категоричког силогизма. Традиционалан средњевековни начин представљања четири *фигуре силогизма* је следећи:

I фигура: $\dfrac{\begin{matrix} MP \\ SM \end{matrix}}{SP}$ II фигура: $\dfrac{\begin{matrix} PM \\ SM \end{matrix}}{SP}$ III фигура: $\dfrac{\begin{matrix} MP \\ MS \end{matrix}}{SP}$ IV фигура: $\dfrac{\begin{matrix} PM \\ MS \end{matrix}}{SP}$

где, у свакој од њих, горњи елементи, који се налазе изнад црте, представљају симболичке записе хипотеза, док доњи елемент, који се налази испод црте, представља закључак дате фигуре. Симболима S, M и P, редом, означени су тзв. мали, средњи и велики термин. Средњи термин се појављује само у хипотезама и омогућава да се у закључку успостави веза између малог и великог термина.

Претпоставља се да су хипотезе и закључци у фигурама силогизма реченице које имају једну од четири горе наведене форме: A, I, E и O.

Следећи уобичајену терминологију теорије силогизама, свака од четири фигуре се може реализовати кроз неколико тзв. *модуса*, који се могу добити комбиновањем форми хипотеза и закључака, што би значило да свака фигура заправо има $4^3 = 64$ могућа модуса, односно да би укупно, за све фигуре, било 256 могућих модуса. Наравно, само неки од њих, и то врло мали број, водили би нас логички исправном закључивању.

Укупан број логички исправних модуса износи 15 и они се у литератури (в. [3, 5]) наводе под њиховим средњевековним називима као:

I фигура: Barbara, Celarent, Darii, Ferio

II фигура: Cesare, Camestres, Festino, Baroco

III фигура: Datisi, Disamis, Bocardo, Ferison

IV фигура: Camenes, Dimatis, Fresison

где самогласници у овим називима говоре о каквим се реченицама у претпоставкама и закључку ради.

4. Примери

Тако, на пример, модусу C**E**l**A**r**E**nt, прве фигуре, одговарају (E) универзално-негативна и (A) универзално-афирмативна хипотеза са (E) универзално-негативним закључком:

$$\frac{\begin{matrix} EMP \\ ASM \end{matrix}}{ESP}$$

што би значило да, према овом модусу, из хипотеза: $\forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x))$ и $\forall x(S(x) \rightarrow M(x))$ изводимо закључак: $\forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$, или у скуповној интерпретацији, из: $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{P} = \emptyset$ и $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{M}$, изводимо $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{P} = \emptyset$.

Слично, модусу D**A**t**I**s**I** одговарају (A) универзално-афирмативна и (I) партикуларно-афирмативна хипотеза са (I) партикуларно-афирмативним закључком треће фигуре:

$$\frac{\begin{array}{c}AMP\\ IMS\end{array}}{ISP}$$

што значи да, према овом модусу, из хипотеза: $\forall x(M(x) \to P(x))$ и $\exists x(M(x) \wedge S(x))$ закључујемо: $\exists x(S(x) \wedge P(x))$, односно, у скуповном запису, из: $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{M} \neq \emptyset$, следи $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{P} \neq \emptyset$.

С друге стране, ако бисмо из хипотеза EMP и AMS покушали да образложимо закључак OSP, тј. да из: $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{P} = \emptyset$ и $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$, изведемо $\neg(\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{P})$, као контрапример бисмо могли да наведемо случај када је $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{S} = \emptyset$. Ово је, иначе, пример који спада у случај који се у литератури појављује као модус F**E**l**A**pt**O**n, треће фигуре, који би, уз додатну претпоставку о непразности датих скупова, представљао логички исправно расуђивање.

Овај последњи пример захтева и један детаљнији коментар. Наиме, у филозофској литератури се често полази од тога да се реченице A, I, E и O, редом интерпретирају као:

$$\begin{array}{ll} AFG: & \exists x F(x) \wedge \forall x(F(x) \to G(x)) \\ IFG: & \exists x(F(x) \wedge G(x)) \\ EFG: & \exists x F(x) \wedge \exists x G(x) \wedge \forall x(F(x) \to \neg G(x)) \\ OFG: & \exists x G(x) \wedge \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \end{array}$$

што осигурава исправност још неких модуса који су се појављивали у историји теорије категоричког силогизма, до њих укупно 22. У овом случају, одговарајућа скуповна интерпретација размотрених реченичних форми добија овакав облик:

$$\begin{array}{ll} AFG: & \boldsymbol{F} \neq \emptyset \wedge \boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{G} \\ IFG: & \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} \neq \emptyset \\ EFG: & \boldsymbol{F} \neq \emptyset \wedge \boldsymbol{G} \neq \emptyset \wedge \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} = \emptyset \\ OFG: & \boldsymbol{G} \neq \emptyset \wedge \neg(\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{G}) \end{array}$$

Додатни модуси који би били важећи при оваквој интерпретацији су у првој фигури: Barbari и Celaront, у другој: Cesaro, у трећој: Darapti и Felapton, и у четвртој: Bamalip и Fesapo.

Са математичког становишта оваква интерпретација је неприродна, јер би се косила са опште прихваћеним ставом да је, за сваки скуп $\boldsymbol{F}$, $\emptyset \subseteq \boldsymbol{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Allwein, J. Barwise (eds), *Logical Reasoning with Diagrams*, Oxford University Press, New York, 1996.

[2] Б. Боричић, *Дијаграми у настави логике и теорије скупова*, Настава математике, **LVI**, 1–2 (2011), 1–7.

[3] B. Boričić, *Logic and Proof*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2011.

[4] E. M. Hammer, *Logic and Visual Information*, CSLI Publications, Stanford, 1995.

[5] A. Nerode, R. A. Shore, *Logic for Applications*, Springer, New York, 1997.

[6] S.-J. Shin, *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1994.

Економски факултет, Каменичка 6, Београд

E-mail: boricic@ekof.bg.ac.rs