Марко Кошчица

МЕТОД ЛАЖНЕ ПРЕТПОСТАВКЕ У РЕДОВНОЈ НАСТАВИ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Метод лажне претпоставке је једно важно средство које може послужити не само за доказивање тврђења у математици, већ и у закључивању у свакодневном животу. Познато нам је се ова метода заснива на једном једноставном закону исказне алгебре – *закону свођења на апсурд*:

$$\big(\neg q \implies (p \wedge \neg p)\big) \implies q.$$

Наравно, ове ознаке нећемо ученицима помињати, али можемо начин њихове примене приказати кроз задатке.

Ученицима петог разреда можемо показати следеће задатке:

1. *Реши једначину* $0 \cdot x = 5$.

Упутство. Решимо прво једначину $2 \cdot x = 6$. Како налазимо решење ове једначине? $x = 6 : 2$, тј. $x = 3$. Покушајмо сада да решимо полазну једначину користећи рецепт претходне једначине. Дакле, $x = 5 : 0$. Али дељење нулом није дозвољено, па се ова једначина не може решити.

Ово може бити добра прилика да ученик постане свестан шта то значи да се једначина не може решити тј. да једначина нема решења. Дакле, ученик треба да покаже да не постоји број који је решење ове једначине. Ту на сцену ступа метод лажне претпоставке. Претпоставимо, дакле супротно, тј. да постоји неки број c који је решење једначине $0{\cdot}x = 5$. Сетимо се да када нађемо решење једначине, ми проверавамо да ли смо добијену једначину добро решили. Како вршимо проверу? Па, испитујемо да ли добијени број задовољава једначину. Дакле, ако је број c решење једначине $0 \cdot x = 5$, он је задовољава, тј. важи $0 \cdot c = 5$. С друге стране, како је производ нуле и било ког броја једнак нули, биће и производ нуле и броја c једнак нули, тј. $0 \cdot c = 0$. Имамо да је $0 \cdot c = 5$ и $0 \cdot c = 0$. Из овога добијамо да је $5 = 0$, Добијамо, дакле, нешто немогуће. Онда мора бити да је погрешно оно што смо претпоставили, тј. да постоји број c такав да је $0 \cdot c = 5$. Пада у воду та претпоставка.

Закључак: не постоји број c такав да је $0 \cdot c = 5$, тј. једначина $0 \cdot x = 5$ нема решења.

На сличан начин може се решити и следећи задатак.

2. *Докажи да не постоје природни бројеви x и y такви да је* $4 \cdot x + 8 \cdot y = 110$.

На писменом задатку један од задатака може гласити:

3. *Реши једначину* $0 \cdot x = 7$, или

4. *Докажи да не постоје природни бројеви* x *и* y *такви да је* $3 \cdot x + 6 \cdot y = 199$.

Ученицима шестог разреда можемо показати следећи задатак:

5. *Докажи да не постоји троугао чија су два унутрашња угла права.*

На једном од писмених задатака један од задатака може гласити

6. *Докажи да не постоји троугао који има два тупа унутрашња угла* или

7. *Докажи да не могу сва четири унутрашња угла четвороугла бити тупа.*

Иако се претходни задаци постављају обично у облику питања, на пример:

7'. *Да ли постоји четвороугао чија су сва четири унутрашња угла тупа?*, ученику се формулацијом задатка која почиње са „докажи да ... “, недвосмислено поставља задатак да испише решење које ће показати да ли је разумео метод лажне претпоставке. Једино што таквом формулацијом задатак можда може изгубити на тежини.

Познато је да се у седмом разреду ирационалност броја $\sqrt{2}$ доказује методом лажне претпоставке. На аналоган начин се може доказати и ирационалност броја $\sqrt{n}$, где је n природан број који није потпун квадрат. Ученицима седмог разреда можемо показати следеће задатке:

8. *Докажи да број* $4 + \sqrt{3}$ *није рационалан.*

9. *Докажи да број* $7 - \sqrt{11}$ *није рационалан.*

10. *Докажи да број* $8 \cdot \sqrt{13}$ *није рационалан.*

Наравно, овде би било пожељно детаљно подсетити ученике да је скуп рационалних бројева затворен у односу на операције сабирања, одузимања и множења. Takoђе, ученицима седмог разреда може се показати и следећи задатак:

11. *Докажи да троугао чије су странице* $11\,\mathrm{cm}$, $5\,\mathrm{cm}$ *и* $12\,\mathrm{cm}$ *није правоугли.*

На писменом задатку можемо дати исти задатак само са измењеним одговарајућим бројевима.

У осмом разреду ученици се оспособљавају да реше следећи систем једначина:

$$x - 5y = 3, \qquad 2x - 10y = 8,$$

Ако другој једначини додамо прву једначину помножену бројем -2 добићемо једнакост $0 = 2$ која није тачна. Велики број ученика зна да дође до претходне једнакости и када дођу до ове нетачне једнакости знају да напишу: „Систем нема решења“. Да ли сви они знају шта то значи?

У следећем задатку такође се примењује метод лажне претпоставке.

12. *Дат је конвексан* $\angle pOq$. *Нека су* A *и* B *тачке на полуправој* Op *такве да је* $O - A - B$, $OA = 30\,\mathrm{cm}$ *и* $AB = 20\,\mathrm{cm}$, *а* A_1 *и* B_1 *тачке на полуправој* Oq *такве да је* $O - A_1 - B_1$, $OA_1 = 24\,\mathrm{cm}$ *и* $A_1B_1 = 18\,\mathrm{cm}$. *Докажи да праве* AA_1 *и* BB_1 *нису паралелне.*

Решење. Претпоставимо супротно, тј. да су праве AA_1 и BB_1 паралелне. Тада је на основу Талесове теореме $OA : AB = OA_1 : A_1B_1$, односно $30\,\mathrm{cm} : 20\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm} : 18\,\mathrm{cm}$. Из последње једнакости добијамо да је $3 : 2 = 4 : 3$, па је $3 \cdot 3 = 2 \cdot 4$, тј. $9 = 8$. Како последња једнакост није тачна, полазна претпоставка пада у воду, па закључујемо да праве AA_1 и BB_1 нису паралелне.

13. *Докажи да троугао чије су странице* $12\,\mathrm{cm}$, $15\,\mathrm{cm}$ *и* $10\,\mathrm{cm}$ *није сличан троуглу чије су странице* $10\,\mathrm{cm}$, $8\,\mathrm{cm}$ *и* $5\,\mathrm{cm}$.

Решење. Претпоставимо супротно, тј. да су ови троуглови слични. Због пропорционалности страница сличних троуглова, поредак дужина страница једног троугла мора одговарати поретку дужина одговарајућих страница другог троугла. Ако странице првог троугла означимо са $a = 15\,\mathrm{cm}$, $b = 12\,\mathrm{cm}$ и $c = 10\,\mathrm{cm}$, одговарајуће странице другог троугла би морале бити $a_1 = 10\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 8\,\mathrm{cm}$ и $c_1 = 5\,\mathrm{cm}$. Морало би бити $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Рачунамо: $\frac{a}{a_1} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, $\frac{b}{b_1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{c}{c_1} = \frac{10}{5} = 2$. Добијамо да странице ових троуглова нису пропорционалне, па закључујемо да дати троуглови нису слични.

На крају се поставља питање да ли би ученицима било претешко да на писменом добију задатак који би захтевао да се нешто докаже методом лажне претпоставке. Једно је сигурно, учењем ове методе ученицима може бити олакшано разумевање сложенијих доказа и усвајање нових математичких појмова.

ОШ „Др Драган Херцог", Београд

E-mail: markocos10@hotmail.com