Јелена Станојевић и Катарина Кукић

ДИНАМИКА У УЧИОНИЦИ

или: како кроз примере из економије мотивисати учење диференцних једначина у средњошколској математици

1. Увод – диференцне једначине и динамички системи

Свесни смо да иза озбиљног изучавања диференцних једначина стоји обимна теорија коју овде нећемо износити, а опет са жељом да направимо овај кратак преглед читљив свима који су заинтересовани без обзира на претходно предзнање, даћемо у најкраћим цртама неке основне информације везане за диференцне једначине. За више информација, читаоца упућујемо на [3, 5].

Најједноставнији примери диференцних једначина су аритметички $a_{n+1} = a_n + d$ и геометријски низ $a_{n+1} = qa_n$, $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Оба низа задају се рекурентном везом облика $a_{n+1} = f(a_n)$ и представљају примере диференцне једначине првог реда коју у општем облику записујемо као $F(n, a_n, a_{n+1}) = 0$. Слично се дефинише диференцна једначина k-тог реда $F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0$. Решавање диференцне једначине подразумева налажење свих низова који је задовољавају, при чему је унапред познато k првих чланова низа за једначину k-тог реда. Најчешће се бавимо линеарним диференцним једначинама. Постоје бројне технике за решавање линеарних диференцних једначина, али се овде нећемо бавити прегледом тих техника, већ ћемо са нагласком на примерима из праксе кроз конкретне задатке напоменути и неке од елементарних техника за решавање.

Мислимо да је већ на нивоу средњошколске математике могуће и корисно увести и неке од основних појмова везаних за динамичке системе. Динамички системи у најширем значењу представљају грану математике која се бави изучавањем процеса који се мењају у току времена. Данас је изучавање динамичких система практично неограничено и предмет је многобројних наука: физике, биологије, хемије, економије, астрономије, демографије, медицине, као и разних друштвених наука. Такви процеси који се мењају у току времена описују се или диференцним или диференцијалним једначинама, у зависности од тога да ли време посматрамо као дискретну или континуалну величину. Поменимо даље чувеног еколога Роберта Меја који је у свом раду [2] из 1976. године показао да и нека веома једноставна итеративна пресликавања која описују биолошке системе показују веома комплексна понашања.

Поменимо сада само у кратким цртама основне појмове везане за динамичке системе: *фазни простор* је скуп чији елементи представљају могућа стања система у било ком тренутку времена, време може бити или дискретно ($t \in \mathbb{Z}$) или континуално ($t \in \mathbb{R}$) и *закон еволуције* који нам омогућава да знајући стање система у једном тренутку одредимо стање система у неком другом тренутку. Претпоставља се да закон еволуције не зависи од времена t. Ако са X означимо фазни простор динамичког система и са $g^t : X \to X$ оператор еволуције који било које стање система $x \in X$ у тренутку 0, преводи у стање система $g^t x$ у тренутку t. Даље, уведимо појам *трајекторије* или *орбите* тачке x из фазног простора, при чему се ограничавамо на случај дискретног времена јер ћемо се само таквим примерима бавити у овом раду: трајекторија је скуп тачака $\{\dots, x, g(x), g(g(x)) = g^2(x), \dots, g(g^{n-1}(x)) = g^n(x), \dots\}$. Уведимо и појам *фиксне* или *равнотежне* тачке за дискретне динамичке системе: фиксна или равнотежна тачка је она вредност x^* за коју важи $x^* = f(x^*)$. За тачку x, за коју важи $x = f^n(x)$ и $x \neq f^i(x)$, за свако $i < n$, где је $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, кажемо да је *тачка са периодом n*, а за $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ кажемо да је *цикл периода n*.

1.1. Диференцна једначина првог реда. Једноставни примери линеарних динамичких система у економији

Посматрајмо диференцну једначину првог реда облика: $y_t = ay_{t-1} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Разматрамо $a \neq 1$ јер је за $a = 1$ низ бројева y_t управо аритметички низ, са првим чланом y_0 и разликом b. Такође, за $b = 0$, имамо да је $y_t = a^t y_0$, па се ради о геометријском низу са првим чланом y_0 и количником a, па разматрамо $b \neq 0$. Оваква диференцна једначина, када је $a \neq 1$ и $b \neq 0$, често се јавља у економији, рецимо, у случају примера отплате кредита који ћемо размотрити у наставку.

Одредимо сада опште решење једначине, $y_t = ay_{t-1} + b$ за $a \neq 1$. Приметимо прво да вредност $y^* = \frac{b}{1-a}$ задовољава $y^* = ay^* + b$. Ово управо значи, уколико је $y_0 = y^*$, тада ће бити $y_1 = y_2 = \cdots = y_t = y^*$, за свако t. Тако да се из тог разлога вредност y^* назива константним решењем или временски независним решењем. *Опште решење* посматране једначине је $y_t = y^* + (y_0 - y^*)a^t$, за $y^* = \frac{b}{1-a}$.

Сада можемо размотрити понашање општег решења током времена. Наиме, јасно је да понашање зависи од члана a^t. За $a > 1$, $a^t \to \infty$, па $y_t \to \infty$ или $y_t \to -\infty$, што зависи од знака члана $(y_0 - y^*)$. За $a < -1$, a^t осцилаторно расте, па и решење y_t осцилаторно расте. Размотримо сада случај $|a| < 1$. Наиме за $0 \leq a < 1$, члан $a^t \to 0$, па $y_t \to y^*$, док за $-1 < a < 0$ члан $a^t \to 0$ осцилаторно опада, те $y_t \to y^*$ такође осцилаторно опада. За $a = -1$ решење осцилира између две вредности, $y^* + (y_0 - y^*) = y_0$ и $y^* - (y_0 - y^*) = 2y^* - y_0$, тј. јавља се цикл периода 2.

У економији се најчешће срећемо са дискретним динамичким системима описаним диференцним једначинама или системима диференцних једначина. Посматрајмо за почетак најједноставнији задатак израчунавања каматне стопе. Како стање на рачуну зависи од претходног стања на рачуну и камате, можемо овакав процес једноставно моделовати са $S(t+1) = S(t) + kS(t)$, где смо са $S(t)$ означили стање у тренутку t, а са k камату. Претходни модел можемо записати и у облику $S_{n+1} = S_n + kS_n = (1+k)S_n$, што заправо представља најједноставнију диференцну једначину првог реда у виду геометријског низа.

Посматрајмо даље пример отплате кредита од 15000 евра, са каматом од $k = 8\%$ годишње и претпоставимо да клијент годишње исплаћује банци по $g = 2000$ евра. У том случају модел отплате би изгледао $S_{n+1} = (1+k)S_n - g$, односно за конкретне вредности добијамо $S_2 = 14200$, $S_3 = 13336$, $\ldots$ $S_{12} = 1683{,}6$, $S_{13} < 0$, дакле после 13 година кредит би био исплаћен. Ако претпоставимо да је клијент одредио да плаћа 1000 евра годишње из истог модела видимо да тако кредит никада не би био отплаћен јер је $S_2 = 15200 > S_1$. Уколико би клијент изабрао опцију годишње исплате рате кредита у износу од 1200 евра, кредит такође никада не би био отплаћен али би важило $S_1 = S_2 = \cdots = S_n = \cdots = 15000$ евра.

Наравно, и даље је реч о веома једноставном моделу представљеном линеарном диференцном једначином првог реда, али згодном за увођење и објашњавање појмова фиксне тачке и стабилности, а пре свега верујемо да је за ђаке корисно да увођење ових појмова буде засновано на њима разумљивим и актуелним примерима.

Уопштимо претходни пример. Нека је клијент од банке позајмио суму S_0, са каматом k посто годишње и нека је сума коју банци врати променљива у складу са могућностима клијента – нека у току i-те године банци врати g_i. Тада је:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (1+k)S_0 - g_0 \\
S_2 &= (1+k)S_1 - g_1 = (1+k)^2 S_0 - (1+k)g_0 - g_1 \\
&\ldots \\
S_{n+1} &= (1+k)^{n+1}S_0 - g_n - (1+k)g_{n-1} - \cdots - (1+k)^n g_0 \\
&= (1+k)^{n+1}S_0 - \sum_{i=0}^{n} (1+k)^i g_{n-i}.
\end{aligned}
$$

У случају константе годишње исплате $g_i = g$ добијамо

$$
S_{n+1} = (1+k)^{n+1}S_0 - ((1+k)^{n+1} - 1)\frac{g}{k}.
$$

Дакле, ако желимо да дуг исплатимо до почетка $T+1$-ве године, онда из услова $S_{T+1} = 0$ добијамо потребну годишњу рату $g = \dfrac{kS_0}{1-(1+k)^{-T-1}}$ и јасно је да услов исплате кредита у коначном временском периоду представља $g \geq kS_0$.

Вратимо се сад на појам фиксне или равнотежне тачке дискретног динамичког система. У случају претходног модела отплате кредита $S_{n+1} = (1+k)S_n - g$ равнотежну тачку a добијамо из $a = (1+k)a - g$, одакле је $a = \dfrac{g}{k}$, док систем за $k = 0$, $g \neq 0$ нема фиксну тачку.

Следеће важно питање јесте питање стабилности нађене равнотежне тачке. Кажемо да је равнотежна тачка a *стабилна* или *привлачећа* уколико постоји $\varepsilon > 0$ такво да $|S_0 - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = a$. Даље кажемо да је равнотежна тачка *нестабилна* или *одбијајућа* уколико постоји ε такво да за $0 < |S_0 - a| < \varepsilon$ важи $|S_k - a| > \varepsilon$ (не мора да важи за свако k). На основу тога, за наш једноставан модел добијамо следеће:

$$|S_1 - a| = |(1+k)S_0 - g - \frac{g}{k}| = |1+k||S_0 - a|$$

и слично индукцијом доказујемо да је

$$|S_n - a| = |1+k|^n |S_0 - a|.$$

Дакле, a ће бити стабилна равнотежна тачка за $|1+k| < 1$, тј. $-2 < k < 0$, нестабилна за $k < -2$ или $k > 0$, а за случај $k = 0$ већ смо видели да нема равнотежне тачке. Остаје још да испитамо шта се дешава за $k = -2$. У том случају добијамо цикл периода 2 јер је за свако n испуњено:

$$S_{n+2} = -S_{n+1} - g = -(-S_n - g) - g = S_n.$$

1.2. Један модел понуде и тражње као једноставан пример динамичког система

Један од најтипичнијих примера примене динамичких система у економији јесте у моделу понуде и тражње. Свако тржиште се састоји од понуђача (произвођача) и потрошача. Можемо моделовати њихова понашања и на основу тога предвидети понашање цена на том тржишту и испитати дугорочно понашање тржишта под таквим условима.

Посматрајмо за почетак најједноставнији линеарни модел понуде и тражње са наивним очекивањем цена, где је очекивана цена у наредном тренутку P^e_{t+1} једнака цени у претходном тренутку P_t, (тј. $P^e_{t+1} = P_t$):

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S(P^e_{t+1}) = sP_t + a \\ D_{t+1} &= D(P_{t+1}) = -dP_{t+1} + b \\ S_{t+1} &= D_{t+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

где s представља осетљивост произвођача на цене, d осетљивост потрошача на цену и важи $s, d > 0$. Даље из последње једначине, изједначавањем понуде и тражње добијамо

$$sP_t + a = -dP_{t+1} + b,$$

одакле изводимо једначину која даје динамику цене:

$$P_{t+1} = -\frac{s}{d}P_t + \frac{b-a}{d}.$$

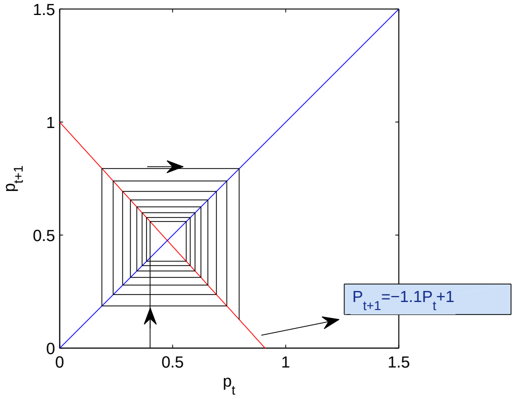
Даље лако налазимо равнотежну цену из

$$P = -\frac{s}{d}P + \frac{b-a}{d}$$

и добијамо $P = \dfrac{b-a}{d+s}$, а како је динамика понашања цене описана једноставном линеарном диференцном једначином првог реда, то лако одређујемо и њено опште решење:

$$P_k = c\Big(-\frac{s}{d}\Big)^k + \frac{b-a}{d+s},$$

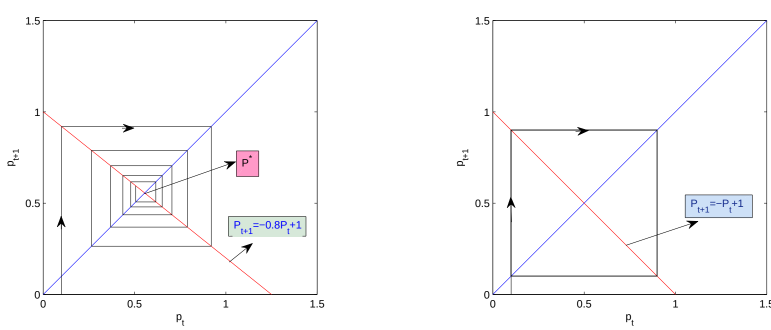
где је c константа коју треба одредити из почетног услова.



Слика 1. Нестабилна фиксна тачка

Када је стабилност у питању, као што је добро познато, уколико произвођачи имају наивну очекивану цену као у претходном примеру, важе следећи закључци: цена је стабилна за $|-\frac{s}{d}| < 1$, тј. за $s < d$ и видимо да су потрошачи осетљивији на цену од произвођача; цена је нестабилна за $s > d$ и на крају за $s = d$ цена конвергира ка циклу периода 2 јер је тада $P_{t+2} = P_t$ за свако t.

Овде ћемо нагласити да је претходне резултате о стабилности веома лако потврдити и методом графичке итерације или такозваном методом *паукове мреже* (cobweb method). За пресликавање дато са $x_{n+1} = f(x_n)$ најпре се из почетне тачке x_0 нацрта вертикална линија до пресека са графиком функције у тачки $(x_0, f(x_0) = x_1)$. Затим се од исте тачке црта хоризонтална линија до пресека са правом $x_{n+1} = x_n$ и након тога опет вертикалну линију до поновног пресека са кривом. Из паукове мреже тако можемо закључити да ли је равнотежна тачка стабилна или не, а неке карактеристичне случајеве из претходне анализе приказали смо на сликама 1 и 2.



(а) Стабилна фиксна тачка (б) 2-цикл

Слика 2. Метод графичке итерације

2. Диференцне једначине другог реда – од Фибоначијевог низа до примена у економији

2.1. Фибоначи као зачетник економске науке

Леонардо из Пизе (1170–1250), познатији по свом надимку Фибоначи („син Боначаˮ), био је један од најталентованијих западних матеметичара у средњем веку. Провео је неко време у Египту, Сирији, Грчкој, Сицилији и Провански, где је изучавао различите математичке методе израчунавања и нумеричке системе. По повратку у Италију покушао је да пренесе то знање кроз Европу и 1202. године написао је своју најутицајнију *Књигу о абаку* (Liber Abaci), где је истакао предности арапско-индијског нумеричког система у односу на римску нумерацију, која се тада користила у Европи. Фибоначи је један од првих истраживача који је развио детаљни математички приступ за финансијска израчунавања. Не само да је анализирао пословне проблеме у то доба, већ је имао главни утицај на развој карактеристичног тржишта капитала у Европи у касном средњем веку и ренесанси, погледати [4] за више детаља. Књига о абаку је садржала доста математичких алата за рачунање садашње вредности, сложеног интереса, развоја геометријских низова за рачунање профита из ризичних послова, и цене добара и новчаних средстава укључујући комплексне промене тежина, мера и валута. Важности књиге је допринео и сам историјски и економски контекст тог времена.

Ипак, данас је Фибоначи свакако најпознатији по рекурзивном бројном низу до кога је дошао из проблема о расту хипотетичке популације зечева, уз идеалне претпоставке (нпр. да до умирања не долази). Уколико је сваком пару потребно 2 месеца да сазри до умножавања и сваки пар даје нови пар од по једне женке и једног мужјака, закључио је да по месецима број парова зечева расте са 1 на 1, на 2, на 3, на 5, на 8, на 13, где се низ теоријски наставља до бесконачности. Математички записано, ако је f_n број парова у n-тој генерацији, тада важи рекурзивна формула $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, уз почетне услове $f_0 = 1$ и $f_1 = 1$, што је једна одговарајућа диференцна једначина другог реда, чије ће решење овде укратко бити изведено. Бројна су занимљива својства Фибоначијевог низа, од којих ћемо само поменути да однос узастопних чланова низа представља такозвани *златни пресек*.

Укратко ћемо приказати два приступа за решавање диференцне једначине другог реда, на примеру Фибоначијевог низа. Први приступ је стандардни приступ за решавање диференцне једначине помоћу њене карактеристичне једначине, док је други приступ помоћу функције генератрисе. Наиме, диференцна једначина коју треба решити је $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, сада са почетним условима $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$, што је хомогена диференцна једначина другог реда. У општем случају, $y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = 0$, се назива *хомогена диференцна једначина другог реда са константним коефицијентима.* Опште решење ове једначине зависи од придружене карактеристичне једначине, која гласи $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Она може да има два реална различита решења, једно реално решење или два коњуговано комплексна решења. Тако да разликујемо три случаја:

1. Ако карактеристична једначина има два реална и различита решења, λ_1 и λ_2, тада је опште решење одговарајуће диференцне једначине

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

где су c_1 и c_2 произвољне константе, које се одређују из почетних услова за y_0 и y_1.

2. Ако карактеристична једначина има једно реално решење, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, тада је опште решење одговарајуће диференцне једначине

$$y_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = (c_1 + c_2 n)\lambda^n,$$

где су c_1 и c_2 произвољне константе, које се одређују из почетних услова за y_0 и y_1.

3. Ако карактеристична једначина има конјуговано комплексна решења, $\lambda_{1,2} = \frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2} = \frac{-a_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$, тада за $\rho^2 = \left(\frac{-a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}\right)^2 = a_2$, $\cos\theta = \frac{\frac{-a_1}{2}}{\sqrt{a_2}} = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$ и $\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}}{\sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2\sqrt{a_2}}$, опште решење одговарајуће диференцне једначине има облик

$$y_n = \rho^n(c_1\cos\theta n + c_2\sin\theta n),$$

где су c_1 и c_2 произвољне константе, које се одређују из почетних услова за y_0 и y_1.

Како је диференцна једначина коју решавамо $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$, са почетним условима $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$, њена карактеристична једначина је $\lambda^2-\lambda-1 = 0$, чија су решења: $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, те је тако опште решење диференцне једначине: $f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Константе c_1 и c_2 се добијају из почетних услова, $f_0 = 0, f_1 = 1$, и добија се $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, па је формула за Фибоначијев низ: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Други приступ за решавање ове диференцне једначине базира се на конструкцији функције генератрисе, што је користан начин за описивање низа природних бројева. Наиме, функција генератрисе је

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

где су коефицијинти b_k одговарајући низ. Често се примењује такозвана затворена форма, облика

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k x^k = \frac{1}{1-bx}.$$

Тако је за Фибоначијев низ $B(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, за $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, са почетним условима $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$. Даље је:

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k = f_0 + f_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{k-1} + f_{k-2}) x^k \\ &= x + \sum_{k=2}^{\infty} f_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} f_{k-2} x^k = x + x \sum_{j=1}^{\infty} f_j x^j + x^2 \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m \\ &= x + x\Big(\sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j - f_0 \Big) + x^2 B(x) = x + xB(x) + x^2 B(x) \end{aligned}$$

и добија се затворена форма функције генератрисе за Фибоначијев низ,

$$B(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Даље, како је за квадратну једначину $1 - x - x^2 = -\Big(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)$, то важи

$$B(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = -\frac{x}{(x+\phi)(x+\hat{\phi})},$$

где је $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\hat{\phi} = 1 - \phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Како је потребно именилац написати у облику $(1 - bx)$, искористимо да је $\phi \cdot \hat{\phi} = -1$ и поделимо бројилац и именилац $B(x)$ са $\phi \cdot \hat{\phi}$. Добија се

$$B(x) = -\frac{x/(\phi\hat{\phi})}{(x+\phi)(x+\hat{\phi})/(\phi\hat{\phi})} = \frac{x}{\Big(\frac{x}{\phi}+1\Big)\Big(\frac{x}{\hat{\phi}}+1\Big)} = \frac{x}{(1-\hat{\phi}x)(1-\phi x)}. \tag{2}$$

Даље се израз (2) може написати у облику $B(x) = \dfrac{a}{1-\hat{\phi}x} + \dfrac{b}{1-\phi x}$. После краћег рачуна добија се $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$, те је

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1-\hat{\phi}x}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\phi}^k x^k\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (\phi^k - \hat{\phi}^k) x^k. \end{aligned}$$

Одавде следи, да за Фибоначијев низ важи

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^k - \hat{\phi}^k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^k.$$

2.2. Пример диференцне једначине другог реда у економији

Овде ћемо навести још један пример примене диференцне једначине другог реда у економији, тачније у једном макро-економском моделу. Ако се, ради једноставности, разматра затворена привреда, без државног сектора, три важне величине говоре о стању те економије: инвестиције (I), приходи (Y) и потрошња (C). Можемо претпоставити да је сваку величину могуће мерити у узастопним временским периодима исте дужине и нека I_t, Y_t и C_t представљају вредности тих величина у тренутку t. Тада за сваку величину имамо вредности у тренутку $t = 0, 1, 2, \ldots$. За сваки тренутак претпостављамо да важи услов равнотежног дохотка $Y_t = C_t + I_t$. Даље, у моделу који разматрамо, а који је у економији познат као *модел мултипликативног акцелератора*, претпоставља се да важе следеће везе између величина: $C_t = c + bY_{t-1}$, где су c и b позитивне константе и $I_t = l + v(Y_{t-1} - Y_{t-2})$, где су l и v позитивне константе. После примене услова равнотеже, $Y_t = C_t + I_t$, добија се диференцна једначина другог реда, по Y_t:

$$Y_t = C_t + I_t = (c + l) + (b + v)Y_{t-1} - vY_{t-2}.$$

На крају, дајемо и пар задатака за вежбу по угледу на задатке из уџбеника за математику намењену студентима економије на чувеној *London School of Economics*, чиме истичемо још једном да је изучавање диференцних једначина стандардан задатак за економисте и стога наглашавамо потребу да се таквим једначинама и у средњошколској математици посвети адекватна пажња.

2.3. Примери за вежбу

1. Планирани број високо технолошких послова који отпочињу сваке године је N. Тренутно је 3000 таквих послова у земљи, али је очекивано да се од свих таквих послова који постоје на почетку једне године, 5% угаси током те године. Нека y_t означава број послова на крају t-те године. Објаснити зашто је
$$y_t = 0.95y_{t-1} + N.$$
Решити ову диференцну једначину за произвољно N. Наћи услов за N који обезбеђује да број послова расте из године у годину.
2. Тржиште се за један артикал моделира са следећим функцијама понуде и тражње:
$$S(p) = p, \quad D(p) = 1 - p.$$
Цена се у току времена t прилагођава, што је одговор на вишак тражње над понудом, према једначини
$$p_{t+1} - p_t = a(D(p_t) - S(p_t)),$$
где је a позитивна константа. Нека је почетна вредност цене $p_0 = \frac{3}{4}$. Решити ову једначину и показати да се током времана t цена приближава равнотежној цени, тј. цени у којој је понуда једнака тражњи, акко $0 < a < 1$. Под којим условима цена тежи равнотежној цени осцилаторно? Шта се дешава са ценом када је $a = \frac{1}{2}$?
3. а) Претпоставимо да је потрошња за текућу годину аритметичка средина вредности прихода за ову годину и потрошње за прошлу годину, то је
$$C_t = \frac{1}{2}(Y_t + C_{t-1}).$$
Претпоставимо такође да је веза између прихода за следећу годину и тренутне инвестиције дата са $Y_{t+1} = kI_t$, за неку позитивну константу k. Показати да уколико важи равнотежни услов $Y_t = C_t + I_t$, тада
$$Y_t - \Big(\frac{k+1}{2}\Big)Y_{t-1} + \frac{k}{2}Y_{t-2} = 0.$$

б) У моделу из а), претпоставимо да је $k = 3$ и да је почетна вредност Y_t позитивна. Показати да Y_t осцилаторно расте.

в) Одредити вредност параметра k за који модел у а) води ка осцилаторном решењу Y_t, и утврдити под којим условом је осцилирање растуће.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Anthony, *Mathematics 2*, Undergraduate study in Ecomomics, Management, Finance and the Social Sciences, University of London, International programmes.

[2] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976), p. 459.

[3] R. E. Mickens, *Difference Equations Theory, Applications and Advanced Topics*, CRC Press, Taylor & Francis Group (2015), p. 527.

[4] W. N. Goetzmann, *Fibonacci and the financial revolution*, NBER working paper series, http://www.nber.org/papers/w10352

[5] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 3 - уубеник за трећи разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2008.

Ј.С.: Економски факултет, Каменичка 6, Београд

E-mail: jelenas@ekof.bg.ac.rs

К.К.: Саобраћајни факултет, Војводе Степе 305, Београд

E-mail: k.mijailovic@sf.bg.ac.rs