Петар Свирчевић

ВИРТУЕЛНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ БРОЈЕВА

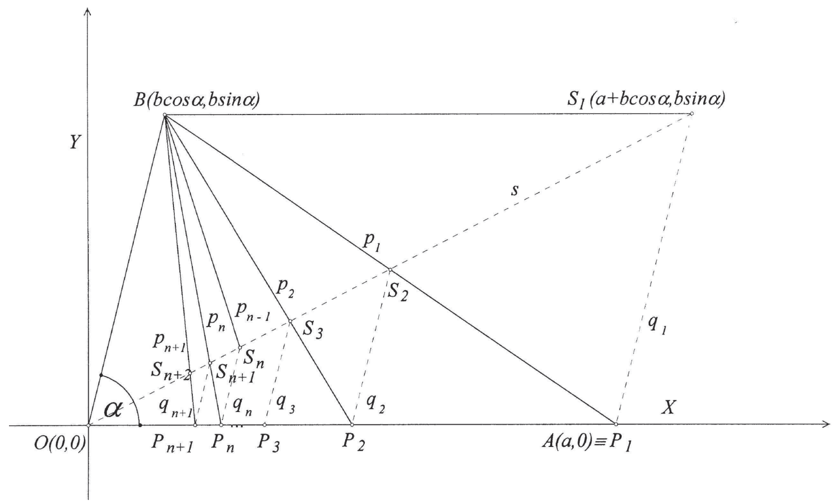
У овом чланку су приказане „виртуелне" (приближне) конструкције трансцендентних бројева $\ln 2$, π и e. Користи се уопштена GLaD-ова метода поделе дужи на једнаке делове у смислу конструктивне геометрије. Наиме, еуклидска конструкција није, наравно, примењива за решење овог проблема. Ово теоријско разматрање се базира на тврђењу које каже да се трансцендентни број не може приказати помоћу коначног броја рационалних сабирака. Дакле, наше конструкције се не могу извести у коначно много корака.

Добро је познато како се може било која дуж поделити, у смислу конструктивне геометрије, на било који број једнаких дужи. Наиме, ту конструкцију је исказао и доказао Еулкид у Пропозицији 10. у Књизи 6, која је саставни део његових *Елемената* (у оргиналу $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$). Та једина метода поделе дужи на једнаке делове се у математици, и не само у математици, примењивала бар двадесет три столећа, све док није објављен чланак [2], чији су аутори Daniel Litchfield и David Goldenheim уз потпору Charles H. Dietrich-а. У том чланку, та теорема конструктивне поделе раздвојена је на два случаја – на случај непарног броја и на случај парног броја једнаких делова. Наведене конструкције се зову *GLaD-ове конструкције*. Видимо да је акроним изведен од првих слова презимена аутора тих конструкција. Но, ми ћемо сада приказати једно уопштење тих конструкција, тако да нећемо разликовати поделу на парни и непарни број једнаких делова, већ ће се она односити на произвољан природни број једнаких делова. Даље, тај поступак ћемо оправдати математичком индукцијом, па ћемо га применити на „конструкцију" трансцендентних бројева.

Конструкција 1. Било која дуж $\overline{OA}$ дели се на било који број n, $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$, једнаких дужи конструкцијом приказаном као на слици 1, где је

$$|OP_n| = \frac{1}{n}\,|OA|.$$

Доказ. Нека је дата дуж $\overline{OA}$ чија је дужина $|OA| = a$. Коструишимо паралелограм OAS_1B, тако да је $|OA| = |BS_1| = a$, $|OB| = |AS_1| = b$ и $\alpha = \angle(OA, OB)$, где је $0 < \alpha < \pi$. Повуцимо дијагонале $\overline{OS_1}$ и $\overline{AB}$, које се секу у тачки S_2. Поставимо тај паралелограм у координатни систем као на слици 1. Јасно је да је апсциса тачке P_2 једнака $\dfrac{a}{2}$, односно $P_2\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, јер је то пресек дужи $\overline{OA}$ с правом



Слика 1

која пролази кроз S_2 а паралелна је с $\overline{OB}$. Слично бисмо рачунањем према истој слици добили да је $P_3\Big(\dfrac{a}{3},0\Big)$, ... , $P_n\Big(\dfrac{a}{n},0\Big)$.

Сада ћемо кроз P_n и $B(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ поставити праву

$$p_n: \qquad y=\frac{b\sin\alpha}{nb\cos\alpha-a}(nx-a), \tag{1}$$

а кроз $O(0,0)$ и $S_1(a+b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ праву

$$s: \qquad y=\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}\,x. \tag{2}$$

Те се праве секу у тачки S_{n+1}, а из (1) и (2) следи да је

$$S_{n+1}\left(\frac{a+b\cos\alpha}{n+1}, \frac{b\sin\alpha}{n+1}\right).$$

Поставимо ли сада праву q_{n+1} кроз тачку S_{n+1}, паралелно с $\overline{OB}$, добићемо да је

$$q_{n+1}: \qquad y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{n+1},$$

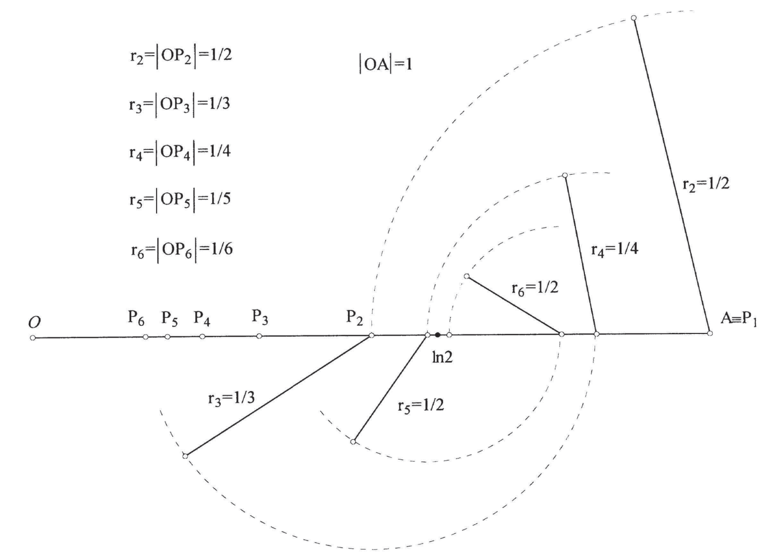
а та права сече осу Ox у тачки $P_{n+1}\Big(\dfrac{a}{n+1},0\Big)$, дакле је $|OP_{n+1}|=\dfrac{1}{n+1}|OA|$, чиме је конструкција на слици 1 у потпуности доказана.

Конструкција 2. Конструишимо трансцендентни број $\ln 2$ „произвољно“ тачно.

Решење. Из математичке анализе знамо да је

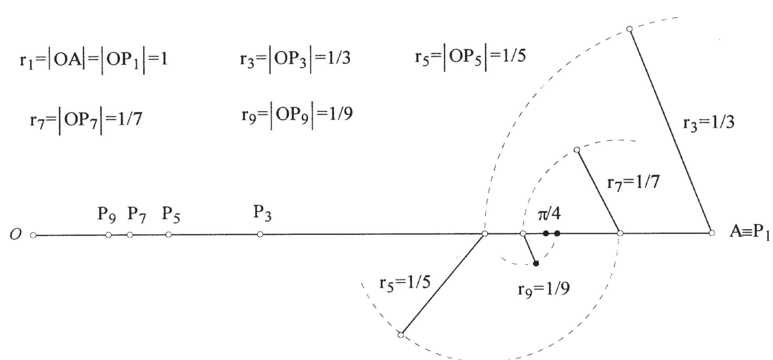
$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots.$$

Дакле, треба конструисати бројеве $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ а то је показано у конструкцији 1. Наиме, претпоставимо да је $\overline{OA}$ јединична дуж, дакле $|OA| = |OP_1| = 1$, па на њу применимо наведену конструкцију. Добијамо ситуацију као на слици 2, где је $|OP_n| = \dfrac{1}{n}$. Видимо да смо наношењем вредности разломака „горе одузимали“ разломке с парним имениоцем, а „доле додавали“ разломке с непарним имениоцем.



Слика 2

Конструкција 3. Конструишимо трансцендентни број $\pi/4$ „произвољно“ тачно.



Слика 3

Решење. Знамо да је

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots .$$

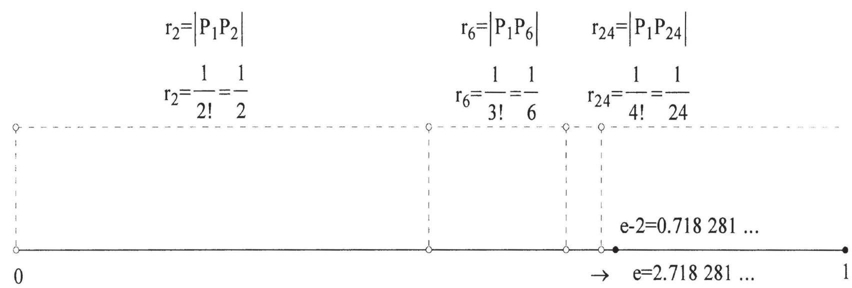
Јасно је да и сада треба знати конструисати $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, а користићемо само $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ Аналогни поступак је као и у претходном задатку, а све то приказује слика 3. Из вредности $\pi/4$ тривијалном конструкцијом се добије вредност броја π.

Конструкција 4. Конструишимо трансцедентни број $e = 2{,}718281\ldots$ „произвољно“ тачно.

Решење. Будући да је

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots ,$$

треба знати конструисати бројеве $\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots$ Коначно, и ту узимамо вредности са слике 1, али из практичних разлога конструишемо најпре „вредност“ $e - 2$. Читав поступак се види на слици 4.



Слика 4

Напомена 1. Већ смо рекли да се ниједан трансцендентни број (а то важи и за неке алгебарске) не може приказати као коначна сума рационалних бројева, али се сваки рационални број може на бесконачно много начина приказати као сума коначног или бесконачног броја рационалних бројева. На пример,

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \cdots \quad \text{или}$$
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

Напомена 2. Гледајући теоријски, могуће је „произвољно“ тачно конструисати све трансцендентне бројеве. Наведимо само неке добро познате облике из математичке анализе:

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots , \qquad \cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots ,$$
$$\operatorname{sh} 1 = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \cdots , \qquad \operatorname{ch} 1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots ,$$
$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots , \qquad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Напомена 3. Јасно је да, чак и помоћу данашњих монитора највеће резолуције, већ након неколико корака извођења ових конструкција долазимо „у тачку“. То се никада неће моћи поправити у тој мери, да би те апроксимативне вредности конструкција биле примењиве у прецизнијој пракси.

Напомена 4. Рецимо и то да сума хармонијског реда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

толико споро дивергира да се та дивергенција не може наслутити ни помоћу рачунара, а поготово не помоћу геометријских конструкција које се приказују на монитору. Наиме, сума првих 10^{43} чланова тог реда је мања од 100.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, (14. Auflage) Teubner, Stuttgart 1999.

[2] D.C. Litchfield, D.A. Goldenheim, *Euclid, Fibonacci, Sketchpad*, The Mathematics Teacher, **90**, 1 (1997), 8–12.

[3] P. Svirčević, *Opća podjela dužine na jednake dijelove*, Poučak br. 10 (15–25), HMD, Zagreb 2002.

[4] *Еуклидови Елементи*, `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`.

Техничка школа, Загреб

E-mail: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`