Марко Кошчица

КАРНООВА ТЕОРЕМА

У овом чланку наводимо Карноову теорему и примере у којима се она може применити.

Теорема 1 (Карно[1]). *Нека су P, Q и R тачке правих одређених ивицама BC, CA и AB троугла ABC. Праве управне на правим BC, CA и AB у тачкама P, Q и R секу се у једној тачки ако и само ако је*

$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0.$$

Доказ. $\Longrightarrow$: Претпоставимо да се праве управне на правим BC, CA и AB секу у једној тачки. Означимо ту тачку са X. Применом Питагорине теореме на правоугле троуглове BPX и CPX је $BP^2 = BX^2 - XP^2$ и $PC^2 = CX^2 - XP^2$, одакле је $BP^2 - PC^2 = BX^2 - CX^2$. Аналогно се добија да је $CQ^2 - QA^2 = CX^2 - AX^2$ и $AR^2 - RB^2 = AX^2 - BX^2$. Одавде је $BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = BX^2 - CX^2 + CX^2 - AX^2 + AX^2 - BX^2 = 0$.

$\Longleftarrow$: Праве управне на правим BC, CA у тачкама P и Q се секу – означимо њихову пресечну тачку са X. Нека је R' подножје управне из тачке X на праву AB. На основу претходно доказаног смера је $BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR'^2 - R'B^2 = 0$. Како је по претпоставци $BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0$, добијамо да је $AR^2 - RB^2 = AR'^2 - R'B^2$. Притом је $AR^2 - RB^2 = \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{RB} \cdot \overrightarrow{RB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR}) \cdot \overrightarrow{AR} - (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BR}$. Аналогно је $AR'^2 - R'B^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AR'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BR'}$. Непосредно се добија да је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RR'} = 0$. Како је $\overrightarrow{AB} \neq 0$ и како тачке R и R' припадају правој AB мора бити $\overrightarrow{RR'} = 0$, тј. $R \equiv R'$. Како је нормала на праву AB у тачки R у равни троугла ABC јединствена, то се праве управне на правим BC, CA и AB у тачкама P, Q и R секу у тачки X. ■

Пример 1. Доказати да се симетрале страница троугла секу у једној тачки.

Решење. Нека су A_1, B_1 и C_1 средишта редом страница BC, CA и AB троугла ABC. Тада је $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$ и $AC_1 = C_1B$. Симетрале страница BC, CA и AB управне су редом на правим BC, CA и AB и пролазе редом кроз тачке A_1, B_1 и C_1. Како је $BA_1^2 - A_1C^2 + CB_1^2 - B_1A^2 + AC_1^2 - C_1B^2 = 0$, то се на основу Карноове теореме симетрале страница троугла секу у једној тачки.

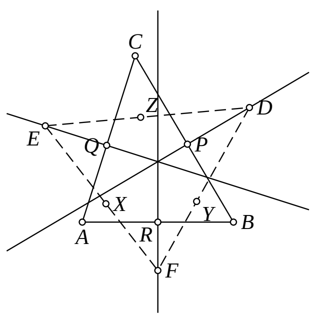
[1] L. Carnot (1753–1823), француски математичар

Пример 2. Доказати да се праве одређене висинама троугла секу у једној тачки.

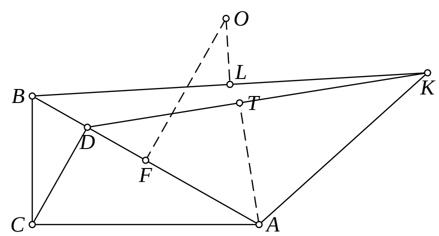
Решење. Нека су P, Q и R подножја висина из темена A, B и C троугла ABC. Из Питагорине теореме добијамо да је $BP^2 - PC^2 = AB^2 - CA^2$, $CQ^2 - QA^2 = BC^2 - AB^2$ и $AR^2 - RB^2 = CA^2 - BC^2$. Сабирањем одговарајуц1их страна једнакости добијамо $BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0$, па на основу Карноове теореме следи да се праве одређене висинама троугла секу у једној тачки.

Пример 3. Дат је троугао ABC. Нека су p, q и r праве управне редом на правим BC, CA и AB које се секу у једној тачки. Нека се D, E и F различите тачке које се налазе редом на правим p, q и r. Доказати да се управне из тачака A, B и C редом на праве EF, FD и DE секу у једној тачки.

Решење. Нека је $\{P\} = BC \cap p$, $\{Q\} = CA \cap q$ и $\{R\} = AB \cap r$ (слика 1). Даље, нека је X подножје управне из A на EF, Y подножје управне из B на FD и Z подножје управне из C на DE. Праве p, q и r се секу у једној тачки, па је на основу Карноове теореме $BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0$. Приметимо да је $EX^2 - XF^2 = AE^2 - AF^2$, $FY^2 - YD^2 = BF^2 - BD^2$ и $DZ^2 - ZE^2 = CD^2 - CE^2$, одакле је $EX^2 - XF^2 + FY^2 - YD^2 + DZ^2 - ZE^2 = AE^2 - AF^2 + BF^2 - BD^2 + CD^2 - CE^2 = AE^2 - CE^2 + BF^2 - AF^2 + CD^2 - BD^2 = AQ^2 - CQ^2 + BR^2 - AR^2 + CP^2 - BP^2 = 0$, па се на основу Карнооове теореме праве AX, BY и CZ секу у једној тачки.



Слика 1



Слика 2

Пример 4. (Републичко такмичење 1990, Србија, 2. разред) Нека је ABC правоугли троугао ($\measuredangle C = 90°$), CD висина троугла и K тачка равни троугла, таква да је $AK = AC$. Доказати да је пречник круга описаног око троугла ABK, који садржи тачку A, нормалан на праву DK.

Решење. Нека је O центар описаног круга $\triangle ABK$, а m и n нормале из O редом на праве AB и BK (слика 2). Даље, нека је $\{F\} = m \cap AB$ и $\{L\} = n \cap BK$. Тада је F средиште дужи AB, а L средиште дужи BK. Нека је T подножје управне из тачке A на праву DK. Без умањења општости доказа претпоставимо да је $B - D - F - A$. Тада је $DT^2 - TK^2 = AD^2 - AK^2 = AD^2 - AC^2 = -CD^2$. Како је и $BF^2 - FD^2 = (BF - FD)(BF + FD) = BD(AF + FD) = BD \cdot AD =$

CD^2, то је $KL^2 - LB^2 + BF^2 - FD^2 + DT^2 - TK^2 = 0$. Како су праве n, m и AT управне редом на праве BK, BD и DK, то се на основу Карноове теореме праве n, m и AT секу у једној тачки. Како се праве n и m секу баш у тачки O, следи да права AT садржи тачку O. Одавде очигледно следи тврђење задатка.

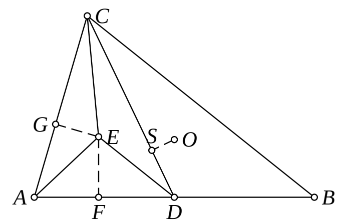
Пример 5. (БМО 1985) Нека је O средиште описаног круга троугла ABC, D средиште дужи AB и E тежиште троугла ACD. Доказати да је $CD \perp OE$ ако и само ако је $AB = AC$.

Решење. Користићемо следеће чињенице без доказивања:

(i) Ако су a, b и c дужине странице троугла, а t_a, t_b и t_c дужине тежишних дужи тог троугла које одговарају редом страницама a, b и c, тада важи

$$t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$
$$t_b^2 - t_a^2 = \frac{3}{4}(a^2 - b^2).$$

(ii) Ако је C_1 средиште странице AB, а T тежиште троугла ABC онда је $CT = 2TC_1$, тј. $CT = \frac{2}{3}CC_1$.



Слика 3

Нека је S подножје нормале n из тачке O на праву CD, а F и G подножја нормала из тачке E редом на праве AB и AC (слика 3). Тада је $DF^2 - FA^2 + AG^2 - GC^2 = DE^2 - AE^2 + AE^2 - CE^2 = DE^2 - CE^2$. Користећи ($i$) и ($ii$) рачунамо $DE^2 - CE^2 = (\frac{2}{3})^2\frac{3}{4}(AD^2 - AC^2) = \frac{4}{9}\frac{3}{4}((\frac{AB}{2})^2 - AC^2) = \frac{1}{3}(\frac{1}{4}AB^2 - AC^2)$. Даље, $CS^2 - SD^2 = CO^2 - OD^2 = AO^2 - OD^2 = AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$. Коначно добијамо

(*)

$$DF^2 - FA^2 + AG^2 - GC^2 + CS^2 - SD^2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{4}AB^2 - AC^2) + \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{3}(AB^2 - AC^2),$$

Ако је $AB = AC$, десна страна једнакости $(*)$ једнака је нули, па је и лева страна исте једнакости једнака нули, а како су праве FE, GE и n управне редом на правим AD, AC и CD то се на основу Карноове теореме оне секу у једној тачки. Праве FE и GE се секу у тачки E па и права n садржи тачку E, одакле је $CD \perp OE$.

Ако је $CD \perp OE$, тачка S припада правој OE, јер је нормала на праву CD из тачке O на праву CD у равни $\triangle ABC$ јединствена. На основу Карноове теореме лева страна једнакости $(*)$ једнака је нули, па следи да је $\frac{1}{3}(AB^2 - AC^2) = 0$, тј. $AB = AC$.

Пример 6. (ИМО 1994) Нека је ABC једнакокраки троугао са $AB = AC$. Претпоставимо да:

(i) M је средиште дужи BC и O је тачка праве AM за коју је OB нормално на AB;

(ii) Q је произвољна тачка дужи BC различита од B и C;

(iii) E припада правој AB и F припада правој AC тако да су тачке E, Q и F различите и колинеарне.

Доказати да је OQ нормално на EF ако и само ако је $QE = QF$.

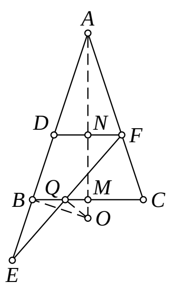
Решење. Размотримо прво случај $Q \equiv M$. Ако је $QE = QF$, тада мора бити $E \equiv B$ и $F \equiv C$, јер је у супротном $\triangle MBE \cong \triangle MCF$, па би следило да је $\measuredangle MBE = \measuredangle MCF$, што је немогуће, јер је један од ова два угла оштар, а други туп. Дакле, $E \equiv B$ и $F \equiv C$, па је очигледно $OQ \perp EF$. Обратно, нека је $OM \perp EF$. Како је $OM \perp BC$, због јединствености нормале из тачке на праву, следи да се праве EF и BC поклапају, па је $E \equiv B$ и $F \equiv C$. Сада је очигледно да је $QE = QF$.

Претпоставимо сада да је $Q \not\equiv M$. Без умањења општости доказа претпоставимо да је $A - B - E$. Тада је $A - F - C$. Нека нормала из F на праву AM сече праве AB и AM, редом, у тачкама D и N (слика 4). Тада је N средиште дужи DF, па је $DN = FN$. Праве BC и DF су паралелне, па је на основу Талесове теореме $BE : BD = QE : QF$, тј. $BE = \frac{QE}{QF}BD$. Означимо израз $QE^2 - QF^2 + FN^2 - DN^2 + BD^2 - BE^2$ са Σ. Тада је

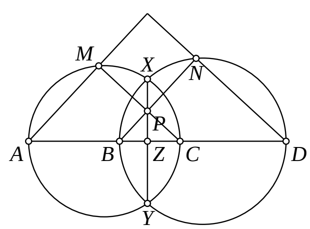
$$\Sigma = QE^2 - QF^2 + BD^2 - \Big(\frac{QE}{QF}\,BD\Big)^2 = \frac{(QE^2 - QF^2)(GF^2 - BD^2)}{QF^2}.$$

Ако је $QE = QF$, тада је $\Sigma = 0$, па се на основу Карноове теореме примењене на $\triangle EDF$ нормала на праву EF у тачки Q у равни троугла ABC и праве BO и NO секу у једној тачки. Како се праве BO и NO секу у тачки O, то је $OQ \perp EF$.

Обратно, ако је $OQ \perp EF$, на основу Карноове теореме је $\Sigma = 0$, одакле је $QE = QF$ или $QF = BD$. Ако би било $QF = BD$, онда бисмо имали $BE = \frac{QE}{QF}BD = QE$, па би $\triangle EBQ$ био једнакокрак, што је немогуће јер је $\measuredangle EBQ$ туп. Следи да мора бити $QE = QF$.



Слика 4



Слика 5

Пример 7. (ИМО 1995) Нека су A, B, C и D четири различите тачке једне праве, распоређене у том поретку. Кругови над дијаметрима AC и BD секу се у тачкама X и Y. Права XY сече BC у тачки Z. Нека је P тачка праве XY различита од Z. Права CP сече круг над дијаметром AC у тачкама C и M, а права BP сече круг над дијаметром BD у тачкама B и N. Доказати да се праве AM, DN и XY секу у једној тачки.

Решење. Без умањења општости доказа претпоставимо да је $X - P - Z$ (слика 5). Како је $\measuredangle AMC = 90°$, то је $AM \perp CP$. Аналогно $DN \perp BP$. Такође је $XY \perp BC$. Дакле, праве AM, DN и XY су управне на правим одређеним ивицама троугла BCP. Израчунајмо вредност израза $CM^2 - MP^2 + PN^2 - NB^2 + BZ^2 - ZC^2$. Како је $AM \perp CP$ то је $CM^2 - MP^2 = AC^2 - AM^2 + AM^2 - AP^2 = AC^2 - AP^2$. Аналогно је $NB^2 - PN^2 = BD^2 - DP^2$. Због $PZ \perp AD$ је $AP^2 - DP^2 = AZ^2 - DZ^2$. Из последње три једнакости добијамо да је $CM^2 - MP^2 + PN^2 - NB^2 = AC^2 - AZ^2 - BD^2 + DZ^2 = (AZ+ZC)^2 - AZ^2 - (BZ+DZ)^2 + DZ^2 = ZC^2 - BZ^2 + 2(AZ \cdot ZC - BZ \cdot DZ)$. Како тачка Z припада правој XY, тј. радикалној оси кругова над пречницима AC и BD, то је $AZ \cdot ZC = BZ \cdot DZ$, одакле је $CM^2 - MP^2 + PN^2 - NB^2 = ZC^2 - BZ^2$, тј. $CM^2 - MP^2 + PN^2 - NB^2 + BZ^2 - ZC^2 = 0$. Испуњен је услов Карноове теореме, па се праве AM, DN и XY заиста секу у једној тачки.

Корисна је и следећа теорема.

Теорема 2. *Нека су AB и XY две праве у истој равни. Тада важи*

$$AB \perp XY \Longleftrightarrow AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2.$$

Доказ. $\Longrightarrow$: Претпоставимо да је $AB \perp XY$. Нека права XY сече праву AB у тачки Z. На основу Питагорине теореме је $AX^2 = AZ^2 + ZX^2$ и $BX^2 = BZ^2 + ZX^2$, одакле је $AX^2 - BX^2 = AZ^2 - BZ^2$. Аналогно се добија $AY^2 - BY^2 = AZ^2 - BZ^2$, одакле је $AX^2 - BX^2 = AY^2 - BY^2$, тј. $AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2$.

$\Longleftarrow$: Нека су X_0 и Y_0 подножја управних редом из тачака X и Y на праву AB. Тада је на основу Питагорине теореме $AX_0^2 - BX_0^2 = AX^2 - BX^2$. Аналогно је $AY_0^2 - BY_0^2 = AY^2 - BY^2$, а како је $AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2$, то је $AX_0^2 - BX_0^2 = AY_0^2 - BY_0^2$. Даље $AX_0^2 - BX_0^2 = \overrightarrow{AX_0} \cdot \overrightarrow{AX_0} - \overrightarrow{BX_0} \cdot \overrightarrow{BX_0} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX_0}) \cdot \overrightarrow{AX_0} - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AX_0}) \cdot \overrightarrow{BX_0} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AX_0} + \overrightarrow{BX_0})$. Аналогно је $AY_0^2 - BY_0^2 = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AY_0} + \overrightarrow{BY_0})$. Одузимањем израза $AY_0^2 - BY_0^2$ и $AX_0^2 - BX_0^2$ добијамо да је $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AY_0} - \overrightarrow{AX_0} + \overrightarrow{BY_0} - \overrightarrow{BX_0}) = 0$, одакле је $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{X_0Y_0} = 0$, тј. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{X_0Y_0} = 0$. Како је $\overrightarrow{AB} \neq 0$ и како тачке X_0 и Y_0 припадају правој AB то је $\overrightarrow{X_0Y_0} = 0$, тј. $X_0 \equiv Y_0$. Како је нормала на AB у тачки X_0 која припада равни одређеној правама AB и XY јединствена, закључујемо да су тачке X, Y и X_0 колинеарне. Одавде следи да је $AB \perp XY$.

Напоменимо да се коришћењем ове теореме примери 4, 5 и 6 могу решити елегантно.

Пре него што наведемо следећи пример, подсетимо се неких чињеница везаних за троугао. Нека је ABC произвољни троугао и нека су a, b и c редом дужине страница BC, CA и AB; l_a, l_b дужине одсечака симетрала углова редом из темена A и B; l'_a, l'_b растојања центра уписаног круга $\triangle ABC$ редом од темена A и B. Ако са s означимо полуобим $\triangle ABC$, тј. $s = \frac{a+b+c}{2}$, онда се непосредно из Стјуартове[2] теореме и теореме о симетрали угла троугла добија:

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}, \qquad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{s(s-b)}.$$

[2] M. Stewart (1717–1785), енглески математичар

Применом теореме о симетрали угла троугла непосредно се добија да је:

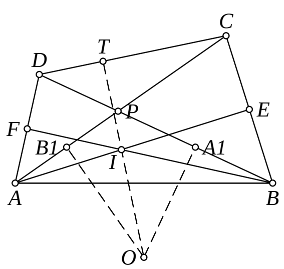
$$l'_a = \frac{b+c}{a+b+c} l_a, \qquad l'_b = \frac{a+c}{a+b+c} l_b.$$

Из претходног се може извести следећа једнакост:

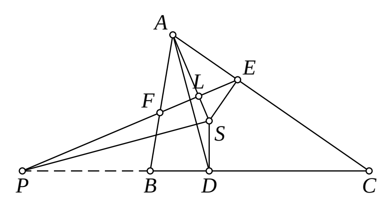
$$(**) \qquad {l'_b}^2 - {l'_a}^2 = c(a-b).$$

Пример 8. (9. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије у Београду, други круг, 4. разред – A категорија) Нека је тачка P пресек дијагонала AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ у ком је $AB = AC = BD$. Нека су O и I центри описаног и уписаног круга троугла $\triangle ABP$. Ако је $O \neq I$, доказати да су праве OI и CD нормалне.

Решење. Нека су E, F, A_1 и B_1 средишта редом дужи BC, AD, BP и AP (слика 6). Пошто је $AB = AC$, права AE полови дуж AE и $\measuredangle BAC$. Због $AB = BD$, права BF полови дуж AD и $\measuredangle ABD$. Из овога следи да је I пресечна тачка правих AE и BF. Пошто тачка I припада симетрали дужи BC то је $CI = BI$. Аналогно, $DI = AI$. Нека је T подножје управне из тачке O на праву CD. Праве OA_1, OB_1 и OT управне су на правим одређеним ивицама троугла CDP, па је на основу Карноове теореме $DT^2 - TC^2 + CB_1^2 - B_1P^2 + PA_1^2 - A_1D^2 = 0$. Како је $OT \perp CD$, то је на основу Теоереме 2 $DO^2 - CO^2 = DT^2 - TC^2 = A_1D^2 - PA_1^2 - (CB_1^2 - B_1P^2) = (BD - BA_1)^2 - PA_1^2 - ((AC - AB_1)^2 - B_1P^2) = BD^2 - BD \cdot BP - (AC^2 - AC \cdot AP) = AB^2 - AB \cdot BP - AB^2 + AB \cdot AP = AB(AP - BP)$. Како је на основу $(**)$ $AI^2 - BI^2 = AB(AP - BP)$, то је $DO^2 - CO^2 = AI^2 - BI^2 = DI^2 - CI^2$, па су на основу Теореме 2 праве OI и CD заиста нормалне.



Слика 6



Слика 7

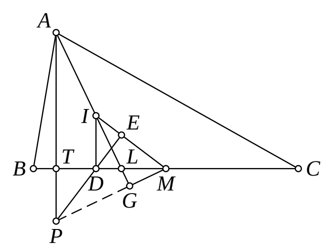
Пример 9. (Државно такмичење 2007, Србија, 3. разред – A категорија) У троуглу ABC у коме је $AB \neq AC$, уписани круг са центром S додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F. Права EF сече праву BC у P. Доказати да је PS нормално на AD.

Решење. Нека је L пресечна тачка дужи EF и AS. Нека је G подножје управне из S на праву AD (слика 7). Због услова $AB \neq AC$ је $G \neq S$. Праве PL, PD и SG су управне на праваим одређеним страницама троугла ASD.

Израчунајмо вредност израза $AL^2 - LS^2 + SD^2 - DD^2 + DG^2 - GA^2$. На основу теореме 2 је $DG^2 - GA^2 = SD^2 - AS^2$. На основу Питагорине теореме је $AL^2 = AE^2 - LE^2, AE^2 = AS^2 - SE^2$ и $LE^2 + LS^2 = SE^2$, па је $AL^2 - LS^2 = AE^2 - LE^2 - LS^2 = AS^2 - 2SE^2$. Сада је $AL^2 - LS^2 + SD^2 - DD^2 + DG^2 - GA^2 = AS^2 - 2SE^2 + SD^2 - 0 + SD^2 - AS^2 = 2(SD^2 - SE^2) = 0$, с обзиром да је $SD = SE$. Сада се на основу Карноове теореме праве PL, PD и SG секу у једној тачки, па следи да тачка P припада правој SG. Одавде је $PS \perp AD$.

Пример 10. (СМО 2016) У $\triangle ABC$ уписана кружница, чији је центар тачка I, додирује страницу BC у тачки D. Нека је тачка M средиште дужи BC. Доказати да се нормале из тачака M и D на праве AI и MI, редом, секу на правој која садржи висину $\triangle ABC$ из темена A.

Решење. Ако је $AB = AC$, тврђење је тривијално, јер се поменуте праве подударају са правом BC која је у том случају нормална на праву AI у тачки D. Претпоставимо зато да је $AB \neq AC$. Без умањења општости доказа претпоставимо да је $AB < AC$. Уведимо ознаке $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$ (слика 8). Означимо полуобим $\triangle ABC$ са s тј. $s = \frac{a+b+c}{2}$. Означимо са T подножје висине $\triangle ABC$ из темена A. Нека је E подножје нормале из тачке D на праву MI, а P тачка у којој права DE сече праву AT. Даље, нека је L тачка у којој права AI сече дуж BC, а G подножје висине $\triangle LMI$ из темена M.

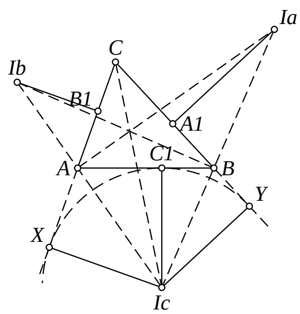


Слика 8

Из услова $c < b$ је $\gamma < \beta$, па је $\measuredangle BLA = \frac{\alpha}{2} + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$. Како је $\measuredangle ATL = 90^\circ$ и $\measuredangle IDL = 90^\circ$, тачке T и L морају бити на правој BC с оне стране тачке L, са које је и тачка B. Како је $ID \parallel AP$, то је на основу Талесове теореме $\frac{DL}{TL} = \frac{IL}{AL}$, одакле је $DL = \frac{IL}{AL}TL < TL$, па закључујемо да важи распоред $T - D - L$. На основу теореме о симетрали угла троугла непосредно се добија да је $BL = \frac{c}{b+c}a$. Како је $BM = \frac{a}{2}$ и $\frac{c}{b+c}a < \frac{c}{c+c}a = \frac{a}{2}$ то је $B - L - M$, тј. тачке B и M су на правој BC са различитих страна тачке L. Коначно добијамо да важи распоред $T - D - L - M - C$. Праве DE, MG и AT управне су на правим одређеним страницама троугла LMI. Израчунајмо вредност израза $ME^2 - EI^2 + IG^2 - GL^2 + LT^2 - TM^2$. На основу теореме 2 је $ME^2 - EI^2 = DM^2 - ID^2$, и $IG^2 - GL^2 = IM^2 - ML^2$, док је на основу Питагорине теореме $DM^2 = IM^2 - ID^2$. Сада је $ME^2 - EI^2 + IG^2 - GL^2 + LT^2 - TM^2 = DM^2 - ID^2 + IM^2 - ML^2 + LT^2 - TM^2 = 2DM^2 - ML^2 + LT^2 - TM^2 = 2DM^2 - ML^2 + (TM - ML)^2 - TM^2 = 2(DM^2 - TM \cdot ML)$ Може се доказати да је $CD = s - c$, па је $DM = CD - CM = s - c - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$. Како је $CL = BC - BL = a - \frac{c}{b+c}a = \frac{b}{b+c}a$ и $MC = \frac{a}{2}$, то је $ML = CL - MC = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$. Из правоуглог троугла ATC и косинусне теореме рачунамо $TC = b\cos\gamma = b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, па је $TM = TC - MC = \frac{b^2-c^2}{2a}$. Коначно добијамо да је $DM^2 - TM \cdot ML = (\frac{b-c}{2})^2 - \frac{b^2-c^2}{2a} \cdot \frac{a(b-c)}{2(b+c)} = 0$, па је $ME^2 - EI^2 + IG^2 - GL^2 + LT^2 - TM^2 = 0$.

На основу Карноове теореме праве DE, MG и AT се секу у једној тачки, одакле следи тврђење задатка.

Пример 11. (Државно такмичење 2017, Србија, 3. разред – А категорија) Дат је $\triangle ABC$. Тачке I_a, I_b и I_c су центри његових приписаних кружница, а тачке A_1, B_1 и C_1 су тачке додира тих приписаних кружница са наспрамним страницама, редом. Доказати да се праве I_aA_1, I_bB_1 и I_cC_1 секу у једној тачки.



Слика 9

Решење. Уведимо ознаке $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AC_1 = x$ и $C_1B = y$ (слика 9). Са s означимо полуобим $\triangle ABC$ тј. $s = \frac{a+b+c}{2}$. Нека приписана кружница са центром I_c додирује праве CA и BC у тачкама X и Y, редом. Како су тангентне дужи из исте тачке на кружницу једнаке, то је $AX = AC_1 = x$ и $BY = C_1B = y$. Такође, из једнакости $CX = CY$ добијамо $CA + AX = BC + BY$, тј. $b + x = a + y$, одакле је

$$x - y = a - b. \tag{***}$$

Из једнакости $x+y=c$ и (***) добијамо да је $x = \frac{c+a-b}{2} = s-b$ и $y = s-a$. Дакле, добијамо да је $AC_1 = s-b$ и $C_1B = s-a$. Аналогно добијамо да је $BA_1 = s-c$, $A_1C = s-b$, $CB_1 = s-a$ и $B_1A = s-c$. Праве I_aA_1, I_bB_1 и I_cC_1 управне су на правим одређеним страницама $\triangle ABC$ редом у тачкама A_1, B_1 и C_1, а како је $BA_1^2 - A_1C^2 + CB_1^2 - B_1A^2 + AC_1^2 - C_1B^2 = (s-c)^2 - (s-b)^2 + (s-a)^2 - (s-c)^2 + (s-b)^2 - (s-a)^2 = 0$, то се на основу Карноове теореме праве I_aA_1, I_bB_1 и I_cC_1 секу у једној тачки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. С. Ковачевић, ***Приручник за додатну наставу из математике – за професоре и ученике средњих школа***, Културно-просветна заједница Војводине, Нови Сад, 1991.

[2] П. М. Васић, О. Митриновић, Р. Р. Јанић, Д. Ђ. Тошић, ***Приручник за такмичења средњошколаца и пријемне испите на факултетима***, Научна књига, Београд, 1991.

[3] В. Јанковић, З. Каделбург, П. Младеновић, ***Међународне и Балканске математичке олимпијаде 1984–1995. године***, Друштво математичара србије, Београд, 1996.

[4] `srb.imomath.com`

[5] `www.artofproblemsolving.com`

[6] М. Митровић, С. Огњановић, М. Вељковић, Љ. Петковић, Н. Лазаревић, ***Геометрија***, уџбеник са збирком задатака за први разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2000.

ОШ „Др Драган Херцог“, Београд

E-mail: `markocos10@hotmail.com`