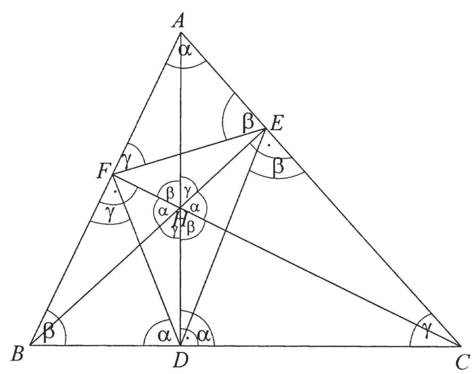
Шефкет Арсланагић

НЕКЕ ЗАНИМЉИВОСТИ У ВЕЗИ ОРТОЦЕНТРИЧНОГ ТРОУГЛА

Посматраћемо оштроугли троугао ABC. Нека су тачке D, E и F подножја висина троугла ABC повучених из његових темена A, B и C на странице BC, CA и AB, редом, а тачка H је ортоцентар тог троугла, тј. $AD \cap BE \cap CF = \{H\}$. Троугао чија су темена тачке D, E и F се у математичкој литератури назива *ортоцентричним троуглом* (сл. 1).



Слика 1

Доказаћемо сљедеће теореме.

Теорема 1. *Троуглови AEF, DFB и DEC су међусобно слични и слични су датом троуглу.*

Доказ. Пошто су углови $\measuredangle BFC$ и $\measuredangle BEC$ прави, то је четвороугао $BCEF$ тетиван, па због тога слиједи:

$$\measuredangle FBC + \measuredangle CEF = 180^\circ, \quad \text{тј.} \quad \measuredangle ABC + 180^\circ - \measuredangle AEF = 180^\circ,$$

односно

$$\measuredangle AEF = \measuredangle ABC = \beta \quad \text{и слично} \quad \measuredangle AFE = \measuredangle ACB = \gamma.$$

Аналогно добијамо

$$\measuredangle BDF = \measuredangle BAC = \alpha, \qquad \measuredangle BFD = \measuredangle BCA = \gamma,$$
$$\measuredangle CDE = \measuredangle CAB = \alpha, \qquad \measuredangle CED = \measuredangle CBA = \beta.$$

Дакле, троуглови AEF, DFB, DEC и ABC имају једнаке углове, па су слични. ■

Теорема 2. *Висине AD, BE и CF датог троугла ABC истовремено су и симетрале унутрашњих углова ортоцентричног троугла DEF, док су странице BC, CA и AB датог троугла симетрале спољашњих углова ортоцентричног троугла DEF.*

Доказ. Како смо показали у доказу теореме 1 да је $\measuredangle FDB = \measuredangle EDC = \alpha$, то је унутрашњи угао ортоцентричног троугла DEF, $\measuredangle FDE = 180^\circ - 2\alpha$. Како је даље $AD \perp BC$, то је $\measuredangle ADF = \measuredangle ADE = 90^\circ - \alpha$. На сличан начин доказујемо и остала тврђења у овој теореми. ■

Посљедица 1. *Ортоцентар датог троугла ABC уједно је и центар уписане кружнице ортоцентричног троугла DEF, а темена A, B и C датог троугла уједно су центри приписаних кружница ортоцентричног троугла.*

Сада ћемо се позабавити израчунавањем обима и површине ортоцентричног троугла. Нека су дужине страница троуглова ABC и DEF: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $EF = a'$, $FD = b'$ и $DE = c'$. Из правоуглих троуглова ABE и ACF имамо $AE = c\cos\alpha$ и $AF = b\cos\alpha$. Примјеном косинусне теореме на троугао AFE добијамо, редом:

$$\begin{aligned} FE^2 &= AE^2 + AF^2 - 2AE\cdot AF\cos\alpha,\\ (a')^2 &= c^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos^3\alpha\\ &= (c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha)\cos^2\alpha = a^2\cos^2\alpha,\\ a' &= a\cos\alpha. \end{aligned}$$

Аналогно добијамо да је $b' = b\cos\beta$ и $c' = c\cos\gamma$. Полуобим троугла DEF је сада

$$s' = \frac{a' + b' + c'}{2} = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{2}. \tag{1}$$

На основу синусне теореме примјењене на троугао ABC имамо:

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta \quad \text{и} \quad c = 2R\sin\gamma. \tag{2}$$

Сада из (1) и (2) слиједи

$$\begin{aligned} s' &= \frac{R}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta + 2\sin\gamma\cos\gamma)\\ &= \frac{R}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma), \end{aligned}$$

а одавде због познатог идентитета $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ добијамо

$$s' = 2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma. \tag{3}$$

Дакле, обим ортоцентричног троугла DEF је

$$O' = 2s' = 4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma. \tag{4}$$

Обим датог троугла ABC је $O = a + b + c = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, а одавде због познатог идентитета $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ добијамо

$$O = 8R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{5}$$

Сада из (4) и (5) слиједи

$$\frac{O'}{O} = \frac{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{8R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \tag{6}$$

Због познате неједнакости ([2], 2.12, с. 20) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$, из (6) слиједи

$$\frac{O'}{O} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, тј. ако је у питању једнакостранични троугао ABC, док су тада странице ортоцентричног троугла DEF средње линије троугла ABC.

Напомена 1. У [5], стр. 105 доказана је (нешто теже, оп.а.) сљедећа теорема.

Теорема 3. *У скупу свих троуглова уписаних у дати троугао ABC, ортоцентрични троугао DEF има најмањи обим.*

Површина ортоцентричног троугла DEF износи $P' = \frac{a'b'}{2}\sin(180^\circ - 2\gamma)$, односно због $a' = a\cos\alpha$, $b' = b\cos\beta$,

$$P' = \frac{ab}{2}\cos\alpha\cos\beta\sin 2\gamma, \tag{7}$$

те аналогно:

$$P' = \frac{ac}{2}\cos\alpha\cos\gamma\sin 2\beta \quad \text{и} \quad P' = \frac{bc}{2}\cos\beta\cos\gamma\sin 2\alpha. \tag{8}$$

Сада из (7) и (8) имамо

$$\begin{aligned} 3P' &= \frac{1}{2}(ab\cos\alpha\cos\beta\sin 2\gamma + ac\cos\alpha\cos\gamma\sin 2\beta + bc\cos\beta\cos\gamma\sin 2\alpha) \\ &= (ab\sin\gamma + ac\sin\beta + bc\sin\alpha)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, \end{aligned}$$

а одавде, користећи синусну теорему за троугао ABC,

$$P' = 4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \tag{9}$$

Како је површина датог троугла $P = \frac{ab}{2}\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, то из (9) добијамо

$$\frac{P'}{P} = \frac{4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \tag{10}$$

Због познате неједнакости ([2], 2.23, с. 25) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$, из (10) слиједи

$$\frac{P'}{P} \leqslant \frac{1}{4},$$

са једнакошћу ако и само ако је ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, тј. ако је дати троугао једнакостраничан.

Израчунаћемо на крају радијусе r' и R' уписане и описане кружнице ортоцентричног троугла DEF. Имамо $r' = \frac{P'}{s'}$, односно због (3) и (9),

$$r' = \frac{4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

а одавде користећи познати тригонометријски идентитет $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

$$r' = 2R\,\frac{-1-\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma}{4} = R(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2),$$

те због познатог тригонометријског идентитета $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

$$r' = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \tag{11}$$

На основу већ поменуте неједнакости $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$,

$$r' \leqslant \frac{1}{4}\,R.$$

Даље, имамо

$$R' = \frac{a'b'c'}{4P'} = \frac{8R^3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{16R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},$$

тј.

$$R' = \frac{R}{2}. \tag{12}$$

Сада из (11) и (12), слиједи

$$\frac{R'}{r'} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \geqslant \frac{1}{4}\cdot 8 = 2,$$

тј. $R' \geqslant 2r'$ (Ојлерова неједнакост).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 8*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2016.

[2] O. Bottema, R.Ž. Đorđević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[3] М.С. Јовановић, Д.Ђ. Тошић, *Збирка решених задатака и проблема из математике за ученике средњих школа*, Завод за уџбенике, Београд, 2010.

[4] S. Mintaković, M. Franić, *Trigonometrija*, Element, Zagreb, 1999.

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba