Петар Свирчевић

ФУНКЦИЈЕ КОЈЕ ПРЕДСТАВЉАЈУ ПАРАБОЛУ ИЛИ ХИПЕРБОЛУ

Општа имплицитна једначина криве другог реда је

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

Тај облик обухвата све криве дугог реда (кружницу, елипсу, хиперболу и параболу; па чак и праву).

Јасно је да димензионирање једнакости (1) имплицира једнакости:

$$[A]_D = [B]_D = [C]_D = L^{-1}, \quad [D]_D = [E]_D = 1, \quad [F]_D = L.$$

Свака квадратна крива дата помоћу (1) привидно је задата помоћу 6 параметара, и помоћу њих можемо анализирати њене транслиране и ротиране облике. Наиме, видимо да (1) представља квадратну криву ако је бар један од коефицијента уз квадратне чланове различит од 0, и онда након деобе те једначине тим коефицијентом добијамо нормирани облик по једном квадратном члану, а то значи да је крива у општем случају задата заправо помоћу 5 параметара.

Напомена 1. Често се у математици изражавамо колоквијално, и то првенствено због тога да скратимо исказ. Тако ћемо за једначину праве рећи да је то права, односно за једначину кривуе ћемо рећи да је то крива, премда су то два битно различита појма.

Напомена 2. Права дата са $x = x_0$ ($x_0 = \text{const}$), дакле нормална на апсцисну осу, сече равну криву $F(x, y) = 0$ у једној тачки, онда и само онда када је та крива функција. Свакако да x_0 мора бити из домена дате функције. Када то није, тада се ради о релацији, или о „двозначној функцији“.

Напомена 3. Ако је $A = C \neq 0$, $B = D = E = 0$ и $F/A = -r^2 < 0$, тада добијамо једначину централне кружнице у облику $x^2 + y^2 = r^2$, која има средиште у координатном почетку, а r је дужина њеног полупречника.

Даље, ако је $A = C \neq 0$, $B = 0$ и $D^2 + E^2 > 4AF$, тада добијамо једначину опште кружнице са средиштем у $S(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A})$ и полупречником дужине $r = \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}$. Димензије координата средишта су $\left[-\frac{D}{2A}\right]_D = \left[-\frac{E}{2A}\right]_D = L$ и $[r]_D = L$, што смо и очекивали. Ту једначину обично пишемо у облику $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, где је $p = \frac{D}{2A}$ и $q = \frac{E}{2A}$. Једначина кружнице не одређује функцију, јер њу права $x = x_0$ сече у двема тачкама или додирује у двострукој тачки левог или десног „темена“. А ако x_0 није из домена кружнице, дакле ако $x_0 \notin [p-r, p+r]$, тада права $x = x_0$ „сече“ кружницу у двема конјуговано комплексним тачкама. Јасно је да је график кружнице унија графика двеју полукружница, којима одговарају функције $f_{1,2}(x) = q \pm \sqrt{r^2-(x-p)^2}$, где треба пазити да се крајеви домена функција доделе само једанпут.

1. Елипса

Ако је $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = E = 0$, $F = -a^2b^2$, тада добијамо једначину елипсе

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

која такође није функција, јер постоји квадратни члан зависно промењиве y^2. Но, он би такође постојао када бисмо ту елипсу транслирали или ротирали, а то значи да би она била пресечена у двема тачкама правом која је нормална на апсцисну осу на подручју домена, из чега следи да не постоји функција чији је график та елипса.

2. Парабола

Ако је $B = C = 0$ и $E \neq 0$, тада из (1) добијамо параболу

$$y = -\frac{A}{E}x^2 - \frac{D}{E}x - \frac{F}{E},$$

која јесте функција, или у уобичајеном облику

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2}$$

Тим обликом се нећемо бавити, јер га детаљно проучавамо у другом разреду средње школе, а у трећем разреду још додајемо да је коефицијент $a = 1/2p$, где p представља удаљеност жиже од директрисе. Но, та парабола ће се дегенерисати у праву када је $a = 0$, а то се добија када $p \to \infty$, јер је $\lim_{p\to\infty} a = \lim_{p\to\infty} 1/2p = 0$, што значи да је удаљеност жиже од директрисе бесконачно велика, дакле спљоштеност параболе је максимална.

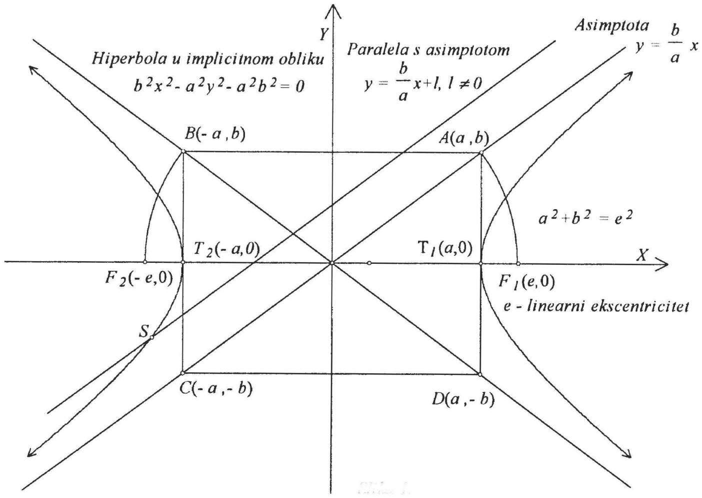
Међутим, ако ту параболу заротирамо, тада више не постоји функција чији је она график. Дакле, главна оса параболе, која спаја жижу и теме, није нормална на апсцисну осу. Свакако да се сада та парабола може представити помоћу две функције, које представљају њену „горњу грану“, односно „доњу грану“. На крају рецимо да је (2) једини тип функције, који представља параболу.

3. Хипербола

Ако је $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = E = 0$, $F = a^2b^2$, тада добијамо једначину хиперболе

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

која такође није функција, јер постоји квадрати члан зависне промењиве y^2. Но, у неким случајевима ће постојати само линеарни члан зависне промењиве, када ту хиперболу транслирамо и ротирамо, тако да она буде пресечена у само једној тачки правом која је нормална на апсцисну осу над подручјем домена, из чега следи да постоји функција чији је график та хипербола.



Слика 1

Сада ћемо детаљније размотрити случај када је хипербола график функције. На слици 1 приказана је хипербола, која је централно постављена у координатном систему. Наиме, то је по положају специјална, а по облику је општа хипербола. Ако ту хиперболу заротирамо око центра, тако да једна асимптота буде нормална на осу Ox, тада добијамо график функције, а сем тога можемо је још и транслирати, па тада добијамо најопштији случај функције која представља хиперболу, као на слици 2.

Да бисмо испунили исказани услов о егзистенцији функције, мора бити $C = 0$. Даље, ако је $\alpha = -\frac{A}{B}$, $\beta = -\frac{D}{B}$, $\gamma = -\frac{F}{B}$, $\delta = \frac{E}{B}$; тада (1) добија облик

$$y = f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x + \delta}. \tag{3}$$

Јасно је да смо ту увели ознаку $y = f(x)$, како не би дошло до забуне ако истовремено посматрамо и асимптоту $y = kx + l$.

Одредимо сада довољан услов да (3) буде хипербола.

Теорема 1. *Функција* (3) *је хипербола ако и само ако је*

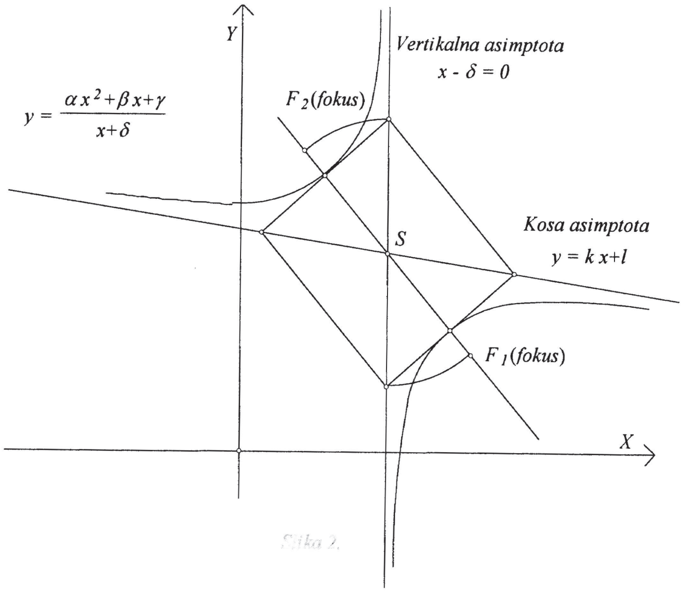
$$\alpha\delta^2 + \gamma \neq \beta\delta. \tag{4}$$

Доказ. Заправо, неопходност смо већ извели, а сада ћемо показати и да је услов довољан. Наиме, из (4) следи да је

$$\begin{aligned} y = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x + \delta} &= \frac{\alpha((x+\delta)^2 - \delta)^2 + \beta((x+\delta) - \delta) + \gamma}{x + \delta} \\ &= \alpha(x+\delta) - 2\alpha\delta + \beta + \frac{\alpha\delta^2 - \beta\delta + \gamma}{x + \delta}, \end{aligned}$$

тј.

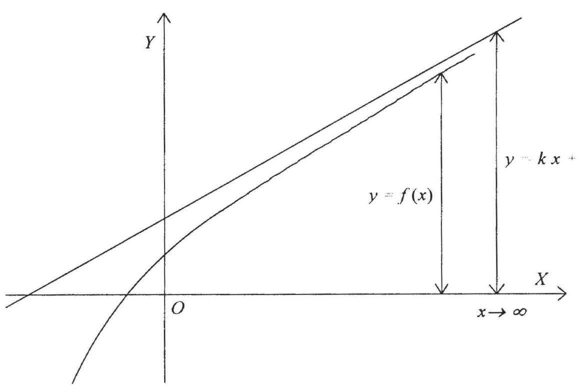
$$y = \alpha(x+\delta) - \alpha\delta + \beta + \frac{\alpha\delta^2 - \beta\delta + \gamma}{x + \delta}. \tag{5}$$



Слика 2

Из (5) видимо да ако важи (4), тада постоји хипербола која је функција, јер постоји вертикална асимптота, а ако то није, тада добијамо праву.

На пример, посматрајмо функцију $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$. Та функција није хипербола, јер је $1 \cdot (-2)^2 + 6 = (-5)(-2)$. Дакле, добијамо праву, што се види из $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$. ■



Слика 3

Напомена 4. Сада ћемо дати практично упутство како можемо наћи косу асимптоту за дату криву. Најпре морамо рећи да је асимптота права којој се крива све више приближава с једне стране и у бесконачности га „стигне“ (слика 3). То заправо значи да је $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + l)] = 0$, а одатле је

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad l = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]. \tag{6}$$

Слично се поступа у случају када $x \to -\infty$. Дакле, треба испитати понашање криве и у крајње „левом“ делу домена.

Свакако, ово извођење правила за налажење косе асимптоте није у духу строге математичке анализе, али је за очекивати да је прихватљиво на елементарном нивоу. Слично се дефинишу вертикална и хоризонтална асимптота.

Помоћу формула (6) нађимо косу асимптоту хиперболе (3). Ако (3) уврстимо у прву од формула (6), добијамо

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + \delta x} = \alpha.$$

Даље, из друге од релација (6) следи

$$l = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x + \delta} - \alpha x\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\beta - \alpha\delta)x + \gamma}{x + \delta} = \beta - \alpha\delta.$$

Дакле, коса асимптота има једначину $y = \alpha x + (\beta - \alpha\delta)$. Исти резултат се добија и када $x \to -\infty$.

Могли бисмо направити сличну анализу једначина за опште случајеве елипсе, хиперболе и параболе када су те криве транслиране, али не и ротиране, јер је то елементарно градиво.

4. Једна специјална класа хипербола

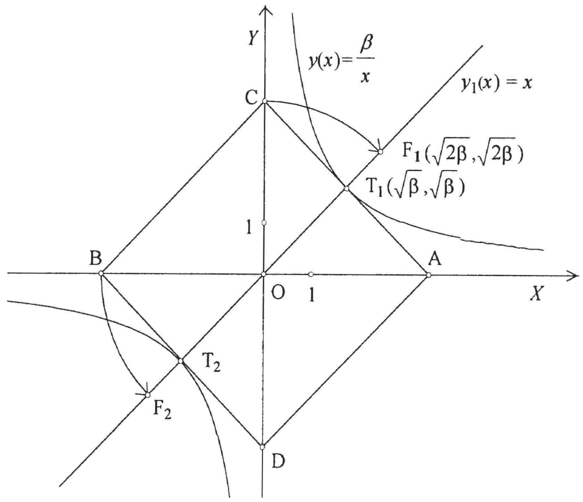
Сада ћемо посматрати једну специјалну класу хипербола, која се често примењује (физика, биологија, хемија, економетрија, …). Ради се о кривој познатој ученицима још из првог разреда средње школе (слика 4), која има једначину у облику

$$y = \frac{\beta}{x}. \tag{7}$$

Јасно је да је у применама β обично именовани број.

Свакако је и овај случај укључен у (1), ако је $A = C = D = E = 0$, $B = 1$, $F = -\beta$.

Ако је $\beta > 0$, тада хипербола има за асимптоте координатне осе, а њена оса која садржи жиже је симетрала првог и трећег квадранта, чија је једначина $y = x$. Да бисмо добили координате темена хиперболе, треба да решимо систем једначина $y = \beta/x$ и $y = x$. Након тог поступка имамо да су темена $T_1(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta})$ и $T_2(-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\beta})$. На основу ових вредности и дефиниције хиперболе добијамо да су жиже $F_{1,2}(\pm\sqrt{2\beta}, \pm\sqrt{2\beta})$. Овде смо искористили својство хиперболе, да су тачке $F_{1,2}, A, B, C, D$ на истој кружници, којој је средиште у центру хиперболе, у овом случају у координатном почетку.



Слика 4

Слични резултати се добијају у случају да је $\beta < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Dehaene, *The Number Sence: How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press, 1997.

[2] J. L. Heilbron, *Geometry Civilized, Oxford, U.K.: Oxford University Press*, 1998.

[3] Д. Хилберт, *Основе геометрије*, Математички институт, Београд, 1957.

[4] A. Lipkovski, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1995.

[5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika, I,II dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1994.

[6] П. Свирчевић, *Примена мнемотехнике у аналитичкој геометрији у равни*, Настава математике LXI, 1–2, 2016.

Tehnička škola Zagreb

E-mail: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`