МОЈ ЧАС

Весна Бал

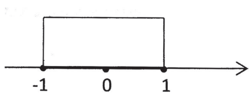
ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Архитектонска техничка школа у Београду

Час почињемо задавањем следећег задатка.

Задатак 1. *Решити једначину* $\sqrt{1-x^2}=1-3x$.

Објашњавамо да оваква једначина спада у класу *ирационалних* јер се непозната x јавља под кореном. Тај корен може бити квадратни (као у овом примеру), али и неког вишег реда.



Слика 1

Када решавамо ирационалне једначине, онда радимо само са реалним бројевима, па зато долазе у обзир само реална решења. Увек најпре одређујемо домен (област дефинисаности) једначине. У нашем задатку мора бити $1-x^2\geqslant 0$, тј. $x\in[-1,1]$, што сликовито приказујемо на бројевној оси.

Како је непозната под квадратним кореном, природно је покушати ослободити се тог корена квадрирањем обеју страна једначине. Имаћемо редом:

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2=(1-3x)^2,\qquad 1-x^2=1-6x+9x^2,\qquad 10x^2-6x=0,$$
$$2x(5x-3)=0,\qquad \text{дакле,}\quad x=0 \text{ или } x=\frac{3}{5}.$$

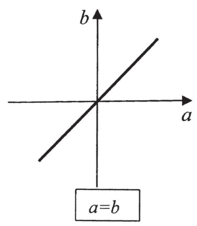
Могло би се помислити да су добијене две вредности решења полазне једначине. Међутим, провера показује да број 0 то заиста јесте, али број $\frac{3}{5}$ то није, мада припада домену једначине. Заиста, $\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$, док је $1-3\cdot\frac{3}{5}=-\frac{4}{5}$.

Зашто се ово десило? Ученицима се сугерише да треба рашчистити проблеме у вези решавања дате једначине. Сви су сагласни са следећим: „када ирационалну једначину решавамо квадрирањем, неопходно је проверити да ли међу добијеним вредностима има оних који не задовољавају једначину и њих одбацујемо“. Слажемо се с тим, али постављамо и питање: „како смо сигурни да неко решење нисмо изгубили?“ Сви ћуте …

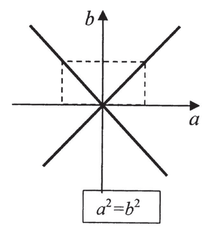
Да бисмо ове проблеме решили, отварамо питање логичке везе услова $a=b$ и $a^2=b^2$. Променљива у овим формулама је пар бројева (a,b), а њен универзални скуп је $\mathbf{R}^2$. Истнитосни скуп за формулу $a = b$ је права (слика 2), а за формулу $a^2 = b^2$ то је унија двеју правих (слика 3), јер важи

$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a-b)(a+b) = 0 \iff a - b = 0 \lor a + b = 0.$$

Видимо да је тачан исказ $(\forall a \in \mathbf{R})(\forall b \in \mathbf{R})\, a = b \implies a^2 = b^2$, али да *није* тачно обратно, тј. $(\forall a \in \mathbf{R})(\forall b \in \mathbf{R})\, a^2 = b^2 \implies a = b$.

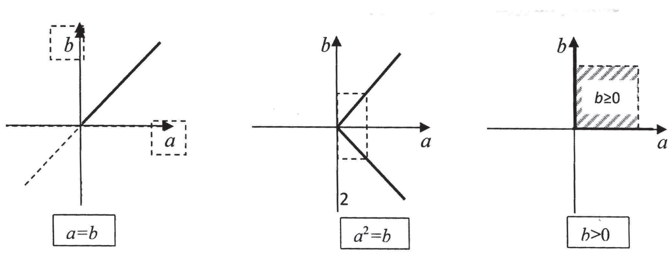


Слика 2



Слика 3

Дакле, квадрирањем једначине добијамо „шири“ услов, тј. добијена једначина има сва решења која има и дата, са могуће још некима. То оправдава уобичајени начин решевања који смо користили у задатку 1.



Слика 4

Ако знамо (као у задатку 1) да је $a \geqslant 0$, онда се можемо ограничити на одговарајућу полураван (слика 4), па добијамо следећи истинит исказ

$$(\forall a \geqslant 0)(\forall b \in \mathbf{R})\; a = b \iff a^2 = b^2 \land b \geqslant 0.$$

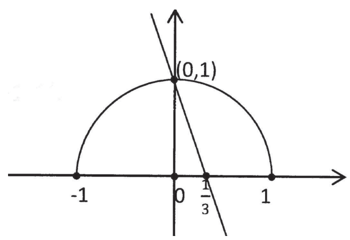
Сада задатак 1 можемо решити и овако:

У нашем примеру је домен $[-1, 1]$, затим $a = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$ и $b = 1 - 3x$. Даље је:

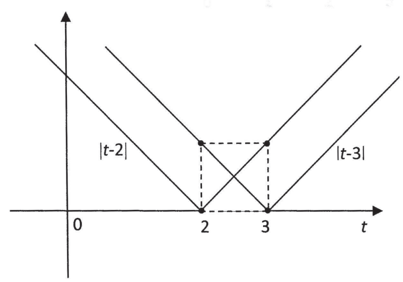
$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} = 1 - 3x &\iff 1 - x^2 = (1-3x)^2 \text{ и } 1 - 3x \geqslant 0 \\
&\iff 10x^2 - 6x = 0 \text{ и } x \leqslant \frac{1}{3} \iff (x = 0 \text{ или } x = \frac{3}{5}) \text{ и } x \leqslant \frac{1}{3} \\
&\iff x = 0,
\end{aligned}$$

јер $x = \frac{3}{5}$ не задовољава услов $x \leqslant \frac{1}{3}$.

Напомена. Када у четвртом разреду припремамо ученике за пријемни испит за упис на факултет, можемо задатак решити и графички. Наиме, ако означимо са $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $g(x) = 1-3x$ изразе на левој и десној страни наше једначине, можемо графички приказати те функције – график прве је горња полукружница кружнице $x^2+y^2=1$, а друге је права (слика 5). Лако се види да је у домену $[-1,1]$ једино решење број 0.



Слика 5



Слика 6

Задатак 2. Решити једначину $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

Домен једначине је одређен са $3x+1 \geqslant 0$ и $x+4 \geqslant 0$, што се своди на $x \in [-\frac{1}{3}, +\infty)$. Директно квадрирање обеју страна једначине не би довело до жељеног упрошћавања. Ефикасније је поступити на следећи начин.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1 \iff \sqrt{3x+1}=1+\sqrt{x+4}\\
&\iff 3x+1=1+2\sqrt{x+4}+x+4 \iff 2\sqrt{x+4}=2x-4\\
&\iff \sqrt{x+4}=x-2 \wedge x \geqslant 2 \iff x+4=x^2-4x+4 \wedge x \geqslant 2\\
&\iff x^2=5x=0 \wedge x \geqslant 2 \iff (x=0 \vee x=5) \wedge x \geqslant 2\\
&\iff x=5.
\end{aligned}$$

Приметимо да смо у овом случају морали двапут да извршимо квадрирање да бисмо се „ослободили“ корена, што ће у многим задацима бити случај.

Задатак 3. Рсшити једначину $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Домен једначине је одређен са $x \geqslant 1$. Једначину можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-1+4-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1+9-6\sqrt{x-1}}=1\\
&\iff \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1\\
&\iff \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1\\
&\iff |t-2|+|t-3|=1,
\end{aligned}$$

где смо увели смену $t=\sqrt{x-1} \geqslant 0$. Лако се, на пример помоћу графика (слика 6), добија да је решење последње једначине свако $t \in [2,3]$, одакле су решења полазне једначине $x \in [5,10]$.

Задатак 4. Решити једначину $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{5x+2}$.

Домен једначине је скуп $\mathbf{R}$ реалних бројева. Како је

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$

имамо

$$\begin{aligned}&\Big(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\Big)^2=\big(\sqrt[3]{5x+2}\big)^3\\ \iff\ & 2x+1+3x+1+3\sqrt[3]{(2x+1)(3x+1)}\big(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\big)=5x+2\\ \iff\ & \sqrt[3]{(2x+1)(3x+1)}\big(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\big)=0.\end{aligned}$$

Заменом $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{5x+2}$ из дате једначине (што није еквивалентна трансформација!) добијамо једначину

$$\sqrt[3]{(2x+1)(3x+1)(5x+2)}=0$$

чија су решења $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{3}$ и $-\dfrac{2}{5}$. Провера (која је овде обавезна!) показује да су ово и решења полазне једначине.

Домаћи задатак. Решити једначине:

1. $\sqrt{1-x^2}=|3x-1|$.
2. $\sqrt{x+3}=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$.
3. $\sqrt{2x^2-3x-5}+1=x$.
4. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.
5. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Марјановић, ***Решавање ирационалних неједначина***, „Математичка трибина“, св. 19, Архимедес, Београд, 1994.
2. Р. Јовановски, ***Ирационалне једначине и неједначине***, Збирка решених задатака, Издање аутора, Београд, 2005.

Архитектонска техничка школа у Београду

E-mail: `marijamajabal@gmail.com`