Петар Свирчевић

ХЕРОНОВА ОПШТА ДИОФАНТСКА ЈЕДНАЧИНА И ВЕЛИКА ФЕРМАОВА ТЕОРЕМА

Сигурно је да нема математичара који није чуо да је 1995. године коначно доказана *Велика* (или *Последња*) *Фермаова теорема*, чиме је решен проблем који је Ферма (Pierre de Fermat) поставио 1637. године. Такође, већина вероватно зна већи део приче о историјату тог проблема, па то нећемо овде понављати. Укратко, Вајлс (Andrew Wiles) је доказао да, како је Ферма и тврдио, за $n > 2$ не постоје природни бројеви x, y, z који задовољавају једначину

$$x^n + y^n = z^n.$$

У овој краткој ноти ћемо показати да се на основу доказане Фермаове теореме може извести да ни диофантска једначина

$$(x^{2n} + y^{2n} + z^{2n})^2 = 2(x^{4n} + y^{4n} + z^{4n}) \tag{1}$$

за $n > 2$ нема решења у целим бројевима, док за $n = 1$ или $n = 2$ решења постоје. Ову једначину зваћемо *уопштена Херонова једначина*, јер је она у вези са познатом формулом за површину троугла која носи Хероново име.

Наиме, поменуту формулу можемо записати у облику

$$P = \frac{1}{4}[(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)]^{1/2},$$

где су x, y, z дужине страница троугла површине P, што се лако трансформише у

$$P = \frac{1}{4}[(x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^4+y^4+z^4)]^{1/2}.$$

Одатле је јасно да одговарајући троугао постоји (није дегенерисан) ако и само ако је $(x^2+y^2+z^2)^2 > 2(x^4+y^4+z^4)$, док се у случају да је

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = 2(x^4+y^4+z^4), \tag{2}$$

одговарајући „троугао“ дегенерише у дуж. Како је последње испуњено ако и само ако је

$$x = y + z \ \vee \ y = z + x \ \vee \ z = x + y,$$

то непосредно закључујемо да једначина (2), која је очито специјалан случај једначине (1) за $n = 1$, има за целобројна решења тројке облика $(x, y, x+y)$, $(x, z+x, z)$ и $(y+z, y, z)$ за $x, y, z \in \mathbf{N}$. (Ово последње се може лако и директно проверити.)

За $n=2$ имамо једначину

$$((x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2)^2=2((x^2)^4+(y^2)^4+(z^2)^4). \tag{3}$$

Слично претходном разматрању, закључујемо да ово може бити испуњено само ако је

$$x^2+y^2=z^2 \ \vee \ y^2+z^2=x^2 \ \vee \ z^2+x^2=y^2,$$

тј. ако тројка (x,y,z) (узета у неком поретку) задовољава Питагорину једначину $x^2+y^2=z^2$. Као што је добро познато, таква једначина има бесконачно много целобројних решења, а познат је и њихов општи облик који је, до на промену места променљивих x и y, дат са

$$x=k(p^2-q^2), \quad y=2kpq, \quad z=k(p^2+q^2), \tag{4}$$

где је $k,p,q\in\mathbf{N}$, $p>q$, p и q су међусобно прости и различите парности. Дакле, и једначина (3) има решења, и она се лако налазе.

Посматрајмо сада случај $n>2$, тј. општу Херонову једначину (1) степена $4n$. Као и у претходним разматрањима, добија се да би решење (x,y,z) те једначине морало да задовољава услов

$$x^n+y^n=z^n$$

(или одговарајући услов добијен пермутацијом променљивих). Међутим, Велика Фермаова теорема управо тврди да такви бројеви x,y,z не постоје.

Дакле, закључак је да општа Херонова једначина (1) има решења ако и само ако је $n=1$ или $n=2$ (што не бисмо могли закључити пре 1995. године).

Пример 1. Проверимо једнакост (3) за Питагорину тројку $(9,40,41)$ (лако се види да је заиста $9^2+40^2=41^2=1\,681$, а такође да се та тројка добија по формулама (4) за $k=1$, $p=5$, $q=4$).

Ако уврстимо ову тројку у једнакост (3), добијамо (уз помоћ рачунара)

$$\begin{aligned}((9^2)^2+(40^2)^2+(41^2)^2)^2 &= 29\,077\,136\,551\,684\\ &= 2((9^2)^4+(40^2)^4+(41^2)^4).\end{aligned}$$

Пример 2. Слично претходном, дужим рачуном се може директно проверити да свака примитивна Питагорина тројка облика $(p^2-q^2,2pq,p^2+q^2)$, $p,q\in\mathbf{N}$, задовољава једначину (3), тј. да важи

$$((p^2-q^2)^4+16p^4q^4+(p^2+q^2)^4)^2=2((p^2-q^2)^8+256p^8q^8+(p^2+q^2)^8).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ž. Zrno, *Neki povjesno-matematički osvrti na poslednji Fermaov teorem*, Matematičko-fizički list 3, Zagreb, 2012/13.

[2] `https://web/math/pmf.unizg.hr/~duje/utb/pitagorine.pdf`

Tehnička škola Zagreb

E-mail: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`