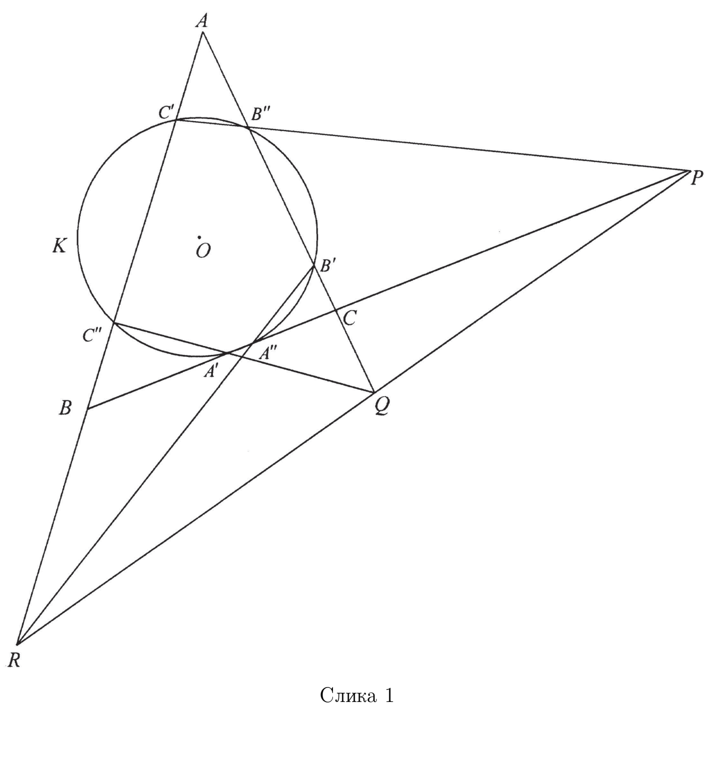
Др Шефкет Арсланагић

ПАСКАЛОВА ТЕОРЕМА И ЊЕНА ПРИМЈЕНА

Блез Паскал (Blaise Pascal, 1623–1662), велики француски математичар, већ је са 16 година написао дјело из геометрије. Његово име носи више резултата у математици, а међу њима је и *Паскалова теорема о тетивном шестоуглу* о којој ће бити речи у овом чланку. Даћемо два доказа ове теореме, као и неколико примјера задатака у којима се она може примјенити.

Теорема (Паскал). *Нека је $A'A''B'B''C'C''$ шестоугао уписан у круг K. Ако се праве $A'A''$ и $B''C'$, $B'B''$ и $C''A'$, $C'C''$ и $A''B'$ сијеку редом у тачкама P, Q и R, тада су тачке P, Q и R колинеарне.*

Доказ 1. Нека се праве $B'B''$ и $C'C''$, $C'C''$ и $A'A''$, $A'A''$ и $B'B''$ сијеку редом у тачкама A, B и C (сл. 1).



Слика 1

Тачке P, Q и R припадају редом правим BC, CA и AB одређеним страницама троугла ABC, па ће оне бити колинеарне на основу *Менелајеве*[1] *теореме* ако докажемо да важи једнакост

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB}=1.$$

Да бисмо доказали ову једнакост, три пута ћемо примјенити Менелајеву теорему на троугао ABC.

Права $C'B''$ сијече праве BC, CA и AB редом у тачкама P, B'' и C'. Стога је

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1,\quad\text{тј.}\quad\frac{PB}{PC}=\frac{B''A\cdot C'B}{B''C\cdot C'A}. \tag{1}$$

Права $C''A'$ сијече праве CA, AB и BC редом у тачкама Q, C'' и A'. Стога је

$$\frac{QC}{QA}\cdot\frac{C''A}{C''B}\cdot\frac{A'B}{A'C}=1,\quad\text{тј.}\quad\frac{QC}{QA}=\frac{C''B\cdot A'C}{C''A\cdot A'B}. \tag{2}$$

Права $A''B'$ сијече праве AB, BC и CA редом у тачкама R, A'' и B'. Стога је

$$\frac{RA}{RB}\cdot\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B'C}{B'A}=1,\quad\text{тј.}\quad\frac{RA}{RB}=\frac{A''C\cdot B'A}{A''B\cdot B'C}. \tag{3}$$

Множењем одговарајући страна једнакости (1), (2) и (3) добијамо

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB}=\frac{B''A\cdot C'B}{B''C\cdot C'A}\cdot\frac{C''B\cdot A'C}{C''A\cdot A'B}\cdot\frac{A''C\cdot B'A}{A''B\cdot B'C},$$

односно

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB}=\frac{B''A\cdot B'A}{C'A\cdot C''A}\cdot\frac{C''B\cdot C'B}{A'B\cdot A''B}\cdot\frac{A''C\cdot A'C}{B'C\cdot B''C}. \tag{4}$$

Потенције тачака A, B и C у односу на круг K изражавамо једнакостима $B''A\cdot B'A=C'A\cdot C''A$, $C''B\cdot C'B=A'B\cdot A''B$ и $A''C\cdot A'C=B'C\cdot B''C$, због чега једнакост (4) добија облик

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB}=1,$$

чиме је Паскалова теорема доказана. ■

Доказ 2. Нека се тачке $A', A'', B', B'', C', C''$ налазе на кружници K, а праве $A'A''$ и $B''C'$, $A''B'$ и $C'C''$, и $B'B''$ и $C''A'$ се сијеку у тачкама P, Q и R, редом (сл. 1). Доказаћемо да су тачке P, Q и R колинеарне. Нека су a,b,c,d,e,f оријентисани углови између једне фиксне праве и правих OA', OA'', OB', OB'', OC', OC'', редом, гдје је тачка O центар кружнице K. Тада важи:

$$\measuredangle(A'A'',B''C')=\frac{a+b-d-e}{2},\quad\measuredangle(B'B'',C''A')=\frac{c+d-f-a}{2},$$
$$\measuredangle(C'C'',A''B')=\frac{e+f-b-c}{2},$$

а одавде слиједи да је сума ових углова једнака нули.

[1] Менелај из Александрије, 1-2. вијек нове ере, старогрчки математичар

Нека је Z пресјечна тачка описаних кружница троуглова $A''B''P$ и $B''C''Q$. Доказаћемо да тачке A'', C'', Z и R припадају једој кружници.У том циљу најпре докажимо да је $\measuredangle(A''Z, ZC'') = \measuredangle(A''R, RC'')$. Очигледно имамо:

$$\begin{aligned}\measuredangle(A''Z, ZC') &= \measuredangle(A''Z, ZB'') + \measuredangle(B''Z, ZC''),\\ \measuredangle(A''Z, ZB'') &= \measuredangle(A''P, PB'') = \measuredangle(A'A'', B''C'),\\ \measuredangle(B''Z, ZC'') &= \measuredangle(B''Q, C''Q) = \measuredangle(B'B'', C''A'),\end{aligned}$$

а како смо раније доказали да је

$$\begin{aligned}\measuredangle(A'A'', B''C') + \measuredangle(B'B'', C'', A') = -\measuredangle(C'C'', A''B') &= \measuredangle(A''B', C'C'')\\ &= \measuredangle(A''R, RC''),\end{aligned}$$

то слиједи да је и $\measuredangle(A''Z, ZC'') = \measuredangle(A''R, RC'')$.

Сада ћемо доказати да су тачке Q, Z и P колинеарне. За ово је довољно доказати да важи $\measuredangle(PZ, ZA'') = \measuredangle(QZ, ZA'')$. Јасно је да важи $\measuredangle(PZ, ZA'') = \measuredangle(PB'', B''A'') = \measuredangle(C'B'', B''A'')$ и $\measuredangle(QZ, ZA'') = \measuredangle(QC'', C''A') = \measuredangle(C'B'', B''A'')$, а одавде слиједи да је и $\measuredangle(PZ, ZA'') = \measuredangle(QZ, ZA'')$.

Слично се доказује да су тачке R, Z и P колинеарне, јер важи

$$\begin{aligned}&\measuredangle(B''Z, ZP) = \measuredangle(B''A'', A''P) = \measuredangle(B''A'', A''A') \quad \text{и}\\ &\measuredangle(B''Z, ZR) = \measuredangle(B''C'', C''R) = \measuredangle(B''A'', A''A').\end{aligned}$$

Закључили смо да тачке Q и R припадају правој PZ, а одатле слиједи да су тачке P, Q и R колинеарне, што је и требало доказати. ■

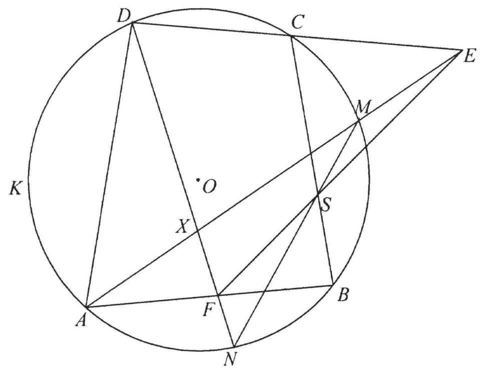
Сада ћемо кроз неколико задатака дати занимљиве примјене Паскалове теореме

Задатак 1. Тачка M припада кружници K описаној око троугла ABC, а R је произвољна тачка њихове равни. Праве AR, BR и CR сијеку кружницу K у тачкама A_1, B_1 и C_1, редом. Доказати да пресјечне тачке правих MA_1 и BC, MB_1, и CA и NC_1 и AB припадају једној правој која садржи тачку R.

Рјешење. Нека су A_2, B_2 и C_2 пресјечне тачне правих о којима се говори у задатку. Примјењујући Паскалову теорему на тачке M, A_1, A, C, B и B_1 добијамо да су тачке A_2, B_2 и R колинеарне. Слично закључујемо да су и тачке A_2, C_2 и R такође колинеарне. Одавде слиједи да су тачке A_2, B_2, C_2 и R колинеарне, што је требало доказати.

Задатак 2. Четвороугао $ABCD$ је уписан у круг K; нека је X произвољна тачка њихове равни, а M и N су пресјечне тачке правих XA и XD са кружницом K. Праве DC и AX, односно AB и DX се сијеку у тачкама E и F, редом. Доказати да пресјечна тачка правих MN и EF припада правој BC.

Рјешење. Нека је S пресјечна тачка правих BC и MN (сл. 2). Примјењујући Паскалову теорему на тачке A, M, N, D, C, B уочавамо да су тачке E, S и F колинеане, што значи да је S пресјечна тачка правих MN и EF.



Слика 2

Задатак 3. На једној кружници K је дато пет тачака. Користећи само лењир конструисати шесту тачку која припада кружници K.

Рјешење. Нека тачке A, B, C, D, E припадају кружници K у наведеном поретку. Претпоставимо да смо конструисали тачку F ове кружнице. Нека су K, L, M пресјечне тачке правих AB и DE, BC и EF, и CD и FA, редом. Тада су на основу Паскалове теореме тачке K, L, M колинеарне. Ову сугерише сљедећу конструкцију. Кроз тачку E конструишимо произвољну праву A која сече праву BC у тачки L. Нека се праве AB и DE сијеку у тачки S, праве SL и CD сијеку у тачки M. Нека је $\{F\} = AM \cap a$ и доказажимо да тачка F припада кружници K. Заиста, нека је F_1 пресјечна тачка кружнице K и праве a. На основу Паскалове теореме слиједи да тачка F_1 припада правој AM, тј. F_1 је пресјечна тачка праве a и праве AM. Дакле, $F_1 \equiv F$.

Задатак 4. Тачке $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ припадају једној кружници k, а тачке K, L, M и N припадају правим A_1A_2, A_3A_4, A_1A_6 и A_4A_5, редом, тако да је $KL \parallel A_2A_3$, $LM \parallel A_3A_6$ и $MN \parallel A_6A_5$. Доказати да је $NK \parallel A_5A_2$.

Рјешење. Нека су P и Q пресјечне тачке праве A_3A_4 са правим A_1A_2 и A_1A_6, редом, а R и S су пресјечне тачке праве A_4A_5 с аправим A_1A_6 и A_1A_2, редом. Тада имамо:

$$A_2K : A_3L = A_2P : A_3P,\ \ A_3L : A_6M = A_3Q : A_6Q,\ \ A_6M : A_5N = A_6R : A_5R,$$

а одавде закључујемо да је жељена једнакост (коју треба доказати) $A_2K : A_5N = A_2S : A_5S$ еквивалентна једнакости

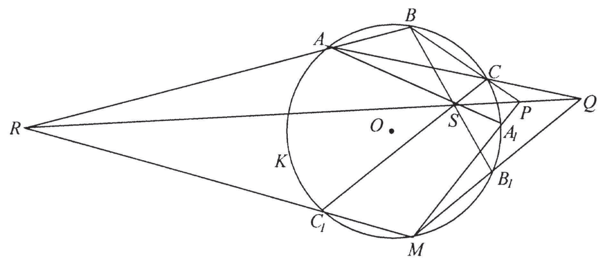
$$\frac{A_2P}{A_5P} \cdot \frac{A_3Q}{A_6Q} \cdot \frac{A_6R}{A_5R} \cdot \frac{A_5S}{A_2S} = 1. \tag{5}$$

Нека је T пресјечна тачка правих A_2A_3 и A_5A_6; на основу Паскалове теореме слиједи да тачке S, Q и T припадају једној правој. Примјењујући Менелајеву теорему на троугао PQS и тачке T, A_2 и A_3, као и на троугао RQS и тачке T, A_5 и A_6, добијамо:

$$\frac{A_2P}{A_2S} \cdot \frac{A_3Q}{A_3P} \cdot \frac{TS}{TQ} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{TQ}{TS} \cdot \frac{A_5S}{A_5R} \cdot \frac{A_6R}{A_6Q} = 1.$$

Множећи ове двије једнакости добијамо жељену једнакост (5), а одавде да је $NK \parallel A_5A_2$, што је требало доказати.

Задатак 5. Нека се три тетиве AA_1, BB_1, CC_1 истог круга K сијеку у једној тачки S и нека је M произвољно одабрана тачка те кружнице, а P, Q, R су тачке у којима праве MA_1, MB_1, MC_1 сијеку редом праве BC, CA, AB. Доказати да праве P, Q, R, S припадају једној правој.



Слика 3

Рјешење. Затворена изломљена линија AA_1MB_1BC састављена је од шест дужи, и уписана је у круг K (сл. 3), стога су према Паскаловој теореми пресјечне тачке S, P, Q правих одређених наспрамним страницама те изломљене линије колинеарне. Исто тако, затворена изломљена линија BB_1MC_1CA, састављена од шест дужи, такође је уписана у круг K, па су према Паскаловој теореми пресјечне тачке S, Q, R правих одређених наспрамним страницама те изломљене линије такође колинеарне. Према томе, тачке P, Q, R, S припадају једној правој.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska rijeq., Sarajevo, 2005.

[2] V. Blagojević, *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002.

[3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, element, Zagreb, 1994.

[4] В.В. Прасолов, *Задачи по планиметрии (Част 1)*, Наука-Физматлит, Москва, 1995.

E-mail: `asefket@pmf.unsa.ba`