Др Ратко Тошић

КАД ЈЕ ЗАДАТАК РЕШЕН, ЈОШ УВЕК ИМА ШТА ДА СЕ РАДИ, ИЛИ: О ЧЕМУ ТРЕБА ДА ВОДЕ РАЧУНА САСТАВЉАЧИ ЗАДАТАКА

У овом чланку ћемо на неколико примера указати на пропусте које понекад сви чинимо састављајући задатке. Те грешке могу бити мање или више суптилне. Да би се оне избегле неопходно је не само решити сопствени задатак, него и пажљиво извршити анализу и проверу решења.

Почнимо једним баналним примером. Претпоставимо да вам је неко поставио следећи задатак:

Задатак 1. Израчунај обим троугла са страницама дужине 3, 5 и 10.

Свако ће вероватно одмах приметити да троугао који задовољава услове задатка – не постоји (јер дате дужине страница не задовољавају неједнакост троугла), иако формално можемо сабрати дате дужине страница и добити њихов тачан збир.

Други такав пример је следећи задатак (сличан се заиста појављивао у једном приручнику за пријемне испите у Америци):

Задатак 2. Одреди површину правоуглог троугла ако је дата хипотенуза $c = 13\,\mathrm{cm}$ и висина на хипотенузу $h_c = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

Огромна већина ученика (од оних који су уопште решавали задатак) израчунала је површину на уобичајен начин:

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{13 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 26\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2.$$

Међутим, троугао са датим елементима не постоји, јер је максимална дужина висине на хипотенузу једнака половини дужине хипотенузе (тај максимум се достиже код једнакокраког правоуглог троугла), док је $4\sqrt{3} > \frac{13}{2}$.

У неким случајевима, операције над елементима непостојећих објеката доводе до резултата, на основу којих није лако констатовати противречности у поставци задатка. Услови постојања тражених објеката захтевају таква ограничења, о којима нема речи у формулацији задатка.

Кад је реч о планиметријским задацима, та ограничења најчешће се односе на неједнакост троугла и чињеницу да је најкраће растојање од тачке до праве одређено нормалом.

Наводимо два примера у којима противречности у условима задатка нису јасно видљиве на први поглед.

Задатак 3. Дате су странице паралелограма $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$ и висина $h_a = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Одреди висину h_b

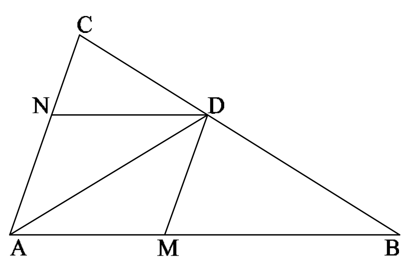
Решење. Како је $a \cdot h_a = b \cdot h_b$ (из формуле за површину), то је

$$h_b = \frac{a \cdot h_a}{b} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}.$$

Већина ученика после овога сматра да је задатак решен. Међутим, малом анализом решења (чиме се ученици најчешће не баве), уочавамо да ја добијена висина већа од странице a, што је немогуће, јер висина на једну страницу паралелограма не може бити већа од друге странице (једнакост важи само ако је тај паралелограм правоугаоник).

Задатак 4. У троугао ABC уписан је ромб $AMDN$ тако што темена M, D, N редом леже на страницама AB, BC и CA. Одреди дужине страница AB и AC ако је $BD = 12\,\mathrm{cm}$, $CD = 8\,\mathrm{cm}$, а обим троугла ABC је $130\,\mathrm{cm}$.

Решење. Знамо да дијагонала ромба полови углове у теменима које спаја. Дакле, дуж AD полови угао MDN, па је она и симетрала угла у темену A троугла (слика). На основу познате теореме о симетрали угла је $AB : AC = BD : CD$, тј. $AB : AC = 12 : 8 = 3 : 2$.



Нека је $AB = 3t$. Тада је $AC = 2t$, па је обим троугла једнак $(5t+20)\,\mathrm{cm}$. На основу тога добијамо једначину $5t + 20 = 130$, и даље $5t = 110$, одакле је $t = 22$, тј. тражене дужине страница су $AB = 66\,\mathrm{cm}$, $AC = 44\,\mathrm{cm}$.

У поставци задатка претпоставља се постојање троугла са наведеним особинама. Међутим, тек анализом добијеног решења долазимо до противречности. Наиме, добили смо да троугао о коме је реч има странице дужине 20, 44, 66 центиметара, а такав троугао не постоји.

Приметимо да је у задатку 3 било лакше, пажљивим читањем услова, уочити противречност одмах на почетку. Довољно је било уочити да је $h_a = \frac{9\sqrt{2}}{2} > 6 = b$ (висина паралелограма одговарајућа једној страници не може бити већа од друге странице). Ирационалан број је намерно изабран како та противречност не би одмах пала у очи, као што би био случај да је дато, на пример, $h_a = 4{,}5\,\mathrm{cm}$.

У задатку 4 ситуација је мало другачија. Противречност је постала уочљива тек после анализе решења, што сугерише да је пожељно да се таква анализа стварно и спроведе после решавања задатка.

Дајемо сада један пример из средњошколске математике. Следећи задатак је такође са пријемног испита у једном америчком граду.

Задатак 5. Дискриминанта квадратне једначине са целобројним коефицијентима једнака је 27. Та једначина:

(A) нема реалних решења;

(B) има једно реално решење;

(C) два различита реална решења;

(D) два комплексна решења;

(E) два чисто имагинарна решења.

Од ученика се тражило да заокруже тачан одговор.

Ово је требало да буде један од најлакших задатака на тесту. Од ученика који су уопште решавали задатак, већина је заокружила одговор C (два различита реална решења), имајући у виду да је дискриминанта позитиван број. Неки су, осим тога, заокружили и одговор D, знајући да је скуп реалних бројева – подскуп скупа комплексних бројева.

Међутим, ако мало пажљивије размотримо поставку задатка, доћи ћемо до непријатног закључка за састављаче теста: једначина о којој је реч – не постоји. Наиме, доказаћемо да израз $b^2 - 4ac$ не може имати вредност 27, ако су a, b, c цели бројеви.

Заиста, посматрајмо остатак при дељењу $b^2 - 4ac$ са 4. Остатак при дељењу целог броја b^2 са 4 је 0 или 1. Следи и да остатак при дељењу броја $b^2 - 4ac$ са 4 може бити само 0 или 1. Међутим, број 27 при дељењу са 4 даје остатак 3. Контрадикција. Значи да не постоји квадратна једначина са целобројним коефицијентима и дискриминантом 27.

Гледано строго логички, било који заокружени одговор морао би бити признат као тачно решење, имајући у виду особину импликације *ex falso quodlibet* (из нетачне претпоставке следи било шта). Међутим, задатак је свакако безсадржајан и несврсисходан на тесту где се утврђује познавање школског градива.

Претходни задатак може да нам послужи и као инспирација да се позабавимо следећим питањем:

Које вредности може имати дискриминанта квадратне једначине са целобројним коефицијентима?

То је задатак о дељивости, пре него о квадратним једначинама, као што показују следећи примери:

Задатак 6. Да ли дискриминанта квадратне једначине са целим коефицијентима може бити једнака:

(а) 2018; (б) 2020?

Решење. (а) Не. Једначина

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где су a, b, c цели бројеви, има дискриминанту $D = b^2 - 4ac$. Претпоставимо да је $D = 2018$. Показаћемо да једначина $b^2 - 4ac = 2018$ нема целобројних решења. Како је десна страна једначине дељива са 2, мора бити и лева, па је $b = 2k$, за неки цео број k. Тада је, међутим, $4k^2 - 4ac = 2018$. Делећи са 2, добијамо да је $2k^2 - 2ac = 1009$. На левој страни једначине добили смо паран број, а на десној непаран, па једначина нема целобројних решења.

(б) Да. За број 2020 имамо $b^2 - 4ac = 2020$, па како је $b = 2k$, добијамо да је $4k^2 - 4ac = 2020$. Делећи са 4, добијамо једначину

$$k^2 - ac = 505.$$

Лако се показује да та једначина има бесконачно много целобројних решења. Једно решење је, на пример: $a = 1, c = 24, k = 23$, па закључујемо да једначина $x^2 + 46x + 24 = 0$ има дискриминанту $D = 46^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 2020$.

Задатак 7. На колико начина се могу изабрати природни бројеви b и c тако да дискриминанта квадратне једначине

$$x^2 + bx - c = 0$$

има вредност

(а) 20; (б) 101?

Решење. (а) Дискриминанта једначине има облик $b^2 + 4c$, где су b и c природни бројеви. Ако је $b^2 + 4c = 20$, онда је b^2 један од бројева 4 или 16. У првом случају је $b = 2$, $c = 4$; у другом $b = 4$, $c = 1$.

(б) Ако је $b^2 + 4ac = 101$, онда је b^2 непаран, па b може имати вредности: 1, 3, 5, 7, 9. Тада ac узима редом вредности: 25, 23, 19, 13, 5. Разматрајући све случајеве добијамо укупно 11 решења: $(1,1,25)$, $(5,1,5)$, $(25,1,1)$, $(1,3,23)$, $(23,3,1)$, $(1,5,19)$, $(19,5,1)$, $(1,7,13)$, $(13,7,1)$, $(1,9,5)$, $(5,9,1)$.

E-mail: `ratosic@gmail.com`