Др Ратко Тошић

РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА „СВОЂЕЊЕМ ПОЗНАТЕ НА НЕПОЗНАТУ“

Познати математичар Ђерђ Поја рекао је да трик који се употреби три пута – постаје метод. У овом чланку решићемо неколико једначина применом трика који се састоји у томе да се константа која фигурише у једначини третира као непозната. Решавањем једначине по тој „непознатој“ добијамо нову једначину или систем једначина (или систем једначина и неједначина) еквивалентан полазној једначини, а који је једноставан и лако се решава. Овај трик понекад може да се примени на једначине трећег или четвртог степена, чије би решавање уобичајеним поступком било доста компликованије. Илустроваћемо то помоћу неколико примера.

Пођимо од следећег примера.

Пример 1. Решити једначину $\sqrt{5-x} = x^2 - 5$.

Решење. Дата једначина еквивалентна је систему

$$\begin{aligned} 5 - x &= (x^2-5)^2, \\ x &\leqslant 5, \\ x^2 &\geqslant 5. \end{aligned}$$

Једначина система може се написати у облику

$$5^2 - 5(1+2x^2) + x + x^4 = 0.$$

Решавајући ту једначину као квадратну по „непознатој“ 5, добијамо да је

$$5 = \frac{(1+2x^2)+(1-2x)}{2} \quad \text{или} \quad 5 = \frac{(1+2x^2)-(1-2x)}{2},$$

тј.

$$x^2 - x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 5 = 0.$$

Решавањем последње две квадратне једначине по x, налазимо да је

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \qquad \text{и} \qquad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Непосредно се проверава да систем задовољавају само два решења:

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \qquad \text{и} \qquad x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Пример 2. Решити једначину $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$.

Решење. Посматрајући дату једначину као квадратну по $\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^2-x^2\sqrt{2}+x^3-x^2=0,$$

добија се да је

$$\sqrt{2}=\frac{x^2+(x^2-2x)}{2} \quad \text{или} \quad \sqrt{2}=\frac{x^2-(x^2-2x)}{2},$$

односно

$$x^2-x-\sqrt{2}=0 \quad \text{или} \quad x=\sqrt{2},$$

одакле добијамо решења:

$$x_1=\sqrt{2}, \qquad x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}.$$

Пример 3. Решити једначину $x^4-2\sqrt{3}\,x^2+x+3-\sqrt{3}=0$.

Решење. Представимо дату једначину као квадратну по $\sqrt{3}$:

$$(\sqrt{3})^2-(2x^2+1)\sqrt{3}+x^4+x=0.$$

Добијамо

$$\sqrt{3}=\frac{2x^2+1+(2x-1)}{2} \quad \text{или} \quad \sqrt{3}=\frac{2x^2+1-(2x-1)}{2},$$

тј.

$$x^2+x-\sqrt{3}=0 \quad \text{или} \quad x^2-x+1-\sqrt{2}=0.$$

Решења су:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}, \qquad x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}.$$

Пример 4. Решити једначину $x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$.

Решење. Сменом $\sqrt{3}=y$, добија се једначина

$$xy^2+(2x^2+1)y+x^3-1=0$$

која је, за $x\neq 0$, квадратна по y. Добијамо

$$y=\frac{-(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2x},$$

одакле је $\sqrt{3}=1-x$, тј. $x_1=1-\sqrt{3}$, или

$$\sqrt{3}=-\frac{x^2+x+1}{x},$$

тј.

$$x_{2,3}=\frac{-\sqrt{3}-1\pm\sqrt[4]{12}}{2}.$$

Пример 5. Решити једначину $a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}$.

Решење. Третираћемо параметар a као променљиву и посматраћемо функцију $f(a) = a^5 + x$. Њој инверзна функција је $g(a) = \sqrt[5]{a - x}$, и при томе су f и g растуће функције. Полазна једначина еквивалентна је са $a^5 + x = a$, одакле је $x = a - a^5$.

Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

E-mail: `ratosic@gmail.com`