НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXIII, 3-4 (2018), 70–75

Александер Симонич

РАМАНУЏАНОВ ДОКАЗ БЕРТРАНОВОГ ПОСТУЛАТА

1. Увод

Године 1845, француски математичар Жозеф Л. Ф. Бертран (Joseph L. F. Bertand, 1822–1900), у раду о пермутацијама, написао је следеће: „*за сваки природан број* $n \geqslant 4$ *постоји прост број* p *који је већи од* n *и мањи од* $2n-2$“. Ово тврђење Бертран је проверио за $n = 4, 5, \dots, 3 \cdot 10^6$, али није успео да га докаже. Касније је оно добило назив *Бертранов постулат.* Мада се сада већ 150 година зна да је то тврђење тачно, овај назив се и даље користи. Данас се чешће наводи нешто слабији проблем: „*за сваки природан број* n *постоји прост број* $p \in (n, 2n]$“.

Пафнутиј Љвович Чебишов (Пафнутий Львович Чебишев, 1821–1894), отац руске математичке школе, доказао је Бертранову хипотезу седам година касније. У том циљу је увео посебне функције, које су касније постале стандардне у аналитичкој теорији бројева.

Једноставнији доказ је 1919. године објавио индијски математичар-самоук Сриниваса Ајангар Рамануџан (Srinivasa Aiyangar Ramanujan, 1887–1920), видети чланак [4]. Тај прерано преминули математички геније још је у детињству показивао велики математички таленат, али је био „откривен“ тек 1910. године. На Хардијево (Godfrey Harold Hardy, 1877–1947) наговарање, дошао је 1914. године у Кембриџ, где су му после две године доделили докторат. Упркос помањкању математичке прецизности, што је била последица неформалног образовања, добио је завидне резултате у области специјалних функција и њиховој вези с теоријом бројева, који и данас потресају математички свет. Како је говорио Харди, Рамануџан је до својих открића дошао комбинацијом интуиције и необјашњивог начина закључивања, способношћу која се може мерити с Ојлеровом. Због врло слабог здравља, вратио се у Индију, где је убрзо и умро.

Нови доказ Бертрановог постулата је 1932. године дао мађарски математичар Паул Ердеш (Paul Erdös, 1913–1996), што му је био први научни резултат. Његов доказ не користи Чебишовљеве функције и на многим местима, посебно у вези са биномним коефицијентима, подсећа на Рамануџанов доказ. Ердешов доказ је данас вероватно и најпознатији, највише заслугом књиге [1].

Међутим, позадина Чебишовљевог или Рамануџановог доказа боље се слаже с класичним методама аналитичке теорије бројева, и зато је он примеренији као увод у ту област математике. Како је доказ релативно једноставан, овај текст се може користити и за рад на математичкој групи у гимназији.

2. Чебишовљеве функције

Конструишимо низ природних бројева $n_1, n_2, \ldots$ на следећи начин: узмимо $n_1 = 4$ и нека је за $k \geqslant 2$, n_k највећи прост број који је мањи од $2n_{k-1} - 2$. Неколико првих чланова тог низа су

$$4, 5, 7, 11, 19, 31, 59, 113, 223, 443, 883, 1759, 3511, 7019, \ldots$$

Бертранов постулат је очигледно еквивалентан тврђењу да је горњи низ строго растући. Означимо са $\pi(x)$ број простих бројева који нису већи од реалног броја $x \geqslant 2$. Приметимо да је кодомен функције π скуп природних бројева. Ако покажемо да је $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ за $x \geqslant 8$, Бертанов постулат је доказан. Зашто? Ако је наведено тачно, онда за сваки природан број $n \geqslant 4$ интервал $(n, 2n]$ садржи два проста броја. Како бројеви $2n$ и $2n-2$ нису прости, онда интервал $(n, 2n-2)$ садржи бар један прост број, што је управо садржај Бертрановог постулата. Због напред наведеног, довољно је проверити да је $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ за $x \geqslant 2000$.

Уместо са функцијом $\pi(x)$, погодније је радити с Чебишовљевим функцијама. Наиме, Чебишов је за доказ Бертрановог постулата увео следеће функције $\vartheta(x)$ и $\psi(x)$:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p,$$
$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \cdots, \tag{1}$$

где су p прости бројеви. За $x < 2$ дефинишемо $\vartheta(x) = 0$, па је збир (1) уствари коначан. Очигледно је $\vartheta(x) \leqslant \psi(x)$. Функцију ψ можемо да изразимо и другачије. Нека је $\Lambda(n)$ функција чија је вредност различита од нуле само када је n степен неког простог броја p, у ком случају је једнака $\log p$. Притом је

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p + \sum_{p^2 \leqslant x} \log p + \sum_{p^3 \leqslant x} \log p + \cdots = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n). \tag{2}$$

Функције π, ϑ и ψ су основне функције *аналитичке теорије бројева*, а Λ се назива *фон Манголтовом функцијом*. Испоставља се да је најједноставније радити с функцијом ψ. Почетна идеја је да разлику $\pi(x) - \pi(x/2)$ изразимо помоћу функције ϑ. Како је израз $\vartheta(x) - \vartheta(x/2)$ једнак збиру логаритама простих бројева из интервала $(x/2, x]$, важи једноставна процена

$$\pi(x) - \pi\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant \frac{1}{\log x}\Big(\vartheta(x) - \vartheta\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big). \tag{3}$$

Како према (1) важи $\psi(\sqrt{x}) = \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/4}) + \cdots$, имамо

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) = \vartheta(x) - \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) \mp \cdots .$$

Десна страна претходне једнакости није већа од $\vartheta(x)$, па је ϑ растућа функција. Узимајући у обзир да је $\vartheta(x/2) \leqslant \psi(x/2)$, добијамо

$$\vartheta(x) - \vartheta\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) - 2\psi(\sqrt{x}). \tag{4}$$

Комбинујући неједнакости (3) и (4), имамо да је

$$\pi(x) - \pi\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant \frac{1}{\log x}\Big(\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) - 2\psi(\sqrt{x})\Big). \tag{5}$$

Суштина Рамануџановог приступа доказу Бертрановог постулата је једноставнија процена десне стране неједнакости (5).

3. Рамануџанова идеја

Подсетимо се да биномни коефицијенти $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ имају својство симетрије, $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, као и да они учествују у биномној формули

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n. \tag{6}$$

Лако је видети да је, за дато n, највећи биномни коефицијент једнак $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$, где је $\lfloor x\rfloor$ ознака за цели део ненегативног броја x.

Рамануџан је за $x > 0$ увео функцију

$$R(x) = \frac{\lfloor x\rfloor!}{\lfloor x/2\rfloor!^2}.$$

Према основном ставу аритметике следи да је $\log n = \sum_{d|n}\Lambda(d)$. Добијамо да је

$$\log\lfloor x\rfloor! = \sum_{n\leqslant x}\log n = \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}\Lambda(d) = \psi(x) + \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) + \cdots,$$

где при доказу треће једнакости, осим релације (2), користимо и да је број природних бројева између 1 и x, који су дељиви са d, једнак $\lfloor x/d\rfloor$. Зато је

$$\log R(x) = \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) \mp \cdots. \tag{7}$$

Сада се може наслутити како треба ту једнакост искористити у неједнакости (5). Како је ψ растућа функција, добијамо да је

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \leqslant \log R(x) \leqslant \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big),$$

што значи да је $\psi(x) - \psi(x/2) \geqslant \log R(x) - \psi(x/3)$ и

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \Big(\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big) + \Big(\psi\Big(\frac{x}{2}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{4}\Big)\Big) + \Big(\psi\Big(\frac{x}{4}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{8}\Big)\Big) + \cdots\\ &\leqslant \log\Big(R(x)R\Big(\frac{x}{2}\Big)R\Big(\frac{x}{4}\Big)R\Big(\frac{x}{8}\Big)\cdots\Big).\end{aligned}$$

Означимо са $\overline{R}(x)$ производ у последњој загради. Када у тој неједнакости заменимо $x/3$ и искористимо претходну неједнакост, заједно с (5) коначно добијамо

$$\pi(x)-\pi\Big(\frac{x}{2}\Big)\geqslant\frac{1}{\log x}\Big(\log R(x)-\log\overline{R}\Big(\frac{x}{3}\Big)-2\log\overline{R}(\sqrt{x})\Big). \tag{8}$$

Тиме смо задатак свели на тражење погодне доње и горње границе за функцију $R(x)$. Рамануџан је на том месту искористио важну, али неелементарну апроксимацију (Стирлингову формулу), према којој је $\log R(x)<\frac{3}{4}x$ и $\log R(x)>\frac{2}{3}x$ за $x>300$. Закључио је да тада важи

$$\pi(x)-\pi\Big(\frac{x}{2}\Big)>\frac{1}{\log x}\Big(\frac{x}{6}-3\sqrt{x}\Big),$$

јер је $\overline{R}(x)<e^{3x/2}$. Како је за $x\geqslant 400$ десна страна већа од 1, то је Бертранов постулат доказан, додуше по цену примене Стирлингове формуле. У чланку [3] је доказано да се Рамануџанове оцене могу заменити слабијим, али елементарним оценама. То ћемо учинити у следећем одељку.

На овом месту треба поменути да је Рамануџан на крају чланка, без образложења, навео да је $\pi(x)-\pi(x/2)\geqslant 1,2,3,4,5,\ldots$ за све $x\geqslant 2,11,17,29,41,\ldots$. Та напомена је инспирисала математичаре да уведу следећу дефиницију: *за произвољан природан број n, нека R_n означава најмањи природан број, такав да за све $x\geqslant R_n$ важи $\pi(x)-\pi(x/2)\geqslant n$.* Наравно, такав број увек постоји јер је функција $\pi(x)-\pi(x/2)$ неограничена. Једноставно је проверити да првих пет Рамануџанових бројева задовољавају услове ове дефиниције. Приметимо да су сви они прости бројеви. По дефиницији, за свако $x<R_n$, интервал $(x/2,x]$ садржи највише $n-1$ прост број. Зато интервал $(R_n/2,R_n]$ садржи тачно n простих бројева, што значи да је R_n прост број. Тај закључак оправдава термин *Рамануџанови прости бројева.*

4. Границе за функцију $R(x)$

Функцију $R(x)$ ћемо за $x\geqslant 3$ посматрати у зависности од парности броја $\lfloor x\rfloor$. Није тешко израчунати да је $R(x)=\binom{2k}{k}$ за $\lfloor x\rfloor=2k$ и $R(x)=\binom{2k+1}{k}(k+1)$ за $\lfloor x\rfloor=2k+1$. По биномној формули (6) за $x=y=1$ следи неједнакост $\binom{n}{m}\leqslant 2^n$ за све $0\leqslant m\leqslant n$. Ако је n непаран, важи $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=\binom{n}{\lfloor n/2+1\rfloor}$. Тако у том случају имамо два највећа биномна коефицијента. Зато за непарне n важи неједнакост $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\leqslant 2^{n-1}$. Како је $\binom{n}{0}+\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n-1}\leqslant\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$, следи

$$\frac{2^n}{n}\leqslant\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

Помоћу тих елементарних неједнакости добијамо да је $\frac{2^{2k}}{2k}\leqslant R(x)\leqslant 2^{2k}$ за $\lfloor x\rfloor=2k$ и $(k+1)\frac{2^{2k+1}}{2k+1}\leqslant R(x)\leqslant(k+1)2^{2k}$ за $\lfloor x\rfloor=2k+1$. Комбинујући све ове неједнакости, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{2^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor} &= \min\Big\{\frac{2^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor}, \frac{\lfloor x\rfloor+1}{2\lfloor x\rfloor}2^{\lfloor x\rfloor}\Big\} \leqslant R(x)\\ &\leqslant \max\Big\{2^{\lfloor x\rfloor}, \frac{\lfloor x\rfloor+1}{2}2^{\lfloor x\rfloor-1}\Big\} = (\lfloor x\rfloor+1)\,2^{\lfloor x\rfloor-2}.\end{aligned}$$

Ако заменимо $\lfloor x\rfloor$ са x и искористимо да је $x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$, добијамо

$$\frac{2^{x-1}}{x} \leqslant R(x) \leqslant (x+1)2^{x-2}. \tag{9}$$

Једноставно се проверава да важи $(x+1)2^{x-2}\leqslant x\cdot 2^{x-1}$ и $x/2<(3/2)^{x/2}$. Сада је $x\cdot 2^{x-1}<6^{x/2}$ и одатле $R(x)<6^{x/2}$. Одатле добијамо

$$\overline{R}(x) < 6^{x/2+x/4+x/8+\cdots} \leqslant 6^{x}. \tag{10}$$

Сада је јасно да можемо у (8) искористити (10) и леву неједнакост у (9).

5. Доказ

Примењујући оцене из претходног одељка на релацију (8), добијамо

$$\pi(x)-\pi\Big(\frac{x}{2}\Big) > \frac{1}{\log x}\Big(\frac{x}{3}\log\frac{4}{3} - 2\sqrt{x}\log 6 - \log 2x\Big)$$

за $x\geqslant 3$. Означимо са $f(x)$ функцију у последњој загради. Како за $x\geqslant 2$ важи $\sqrt{x}\leqslant x/\sqrt{2}<\frac{5}{7}\,x$ и $\log x<x$, помоћу џепног калкулатора добијамо

$$\begin{aligned}f\left(10^3x\right) &= \Big(\frac{10^3}{3}\log\frac{4}{3}\Big)x - (20\sqrt{10}\log 6)\sqrt{x} - \log\left(2\cdot 10^3\right) - \log x\\ &\approx 95{,}894x - 113{,}321\sqrt{x} - 7{,}601 - \log x > 13{,}91x - 7{,}601\end{aligned}$$

и с тим

$$\pi(10^3x)-\pi\Big(\frac{10^3x}{2}\Big) > \frac{13{,}91x-7{,}601}{x+6{,}908}.$$

Тако је $\pi(x)-\pi(x/2)>1$ за $x\geqslant 2000$, што показује исправност Бертрановог постулата.

Вероватно је многе збунила „неригорозна“ употреба калкулатора у претходном извођењу. И с правом, јер математички доказ мора бити независан од рачунских помагала, мада нам она често указују на прави пут. Зато за крај овог одељка дајемо строги доказ, тако што ћемо искористити следећи познати степени ред

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots, \tag{11}$$

који конвергира за $x\in(-1,1]$. Помоћу смене $x\mapsto \dfrac{1}{x}-1$ трансформишимо (11) у једнакост

$$\log x = \Big(1-\frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{x}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(1-\frac{1}{x}\Big)^3 + \cdots,$$

која важи за $x \geqslant 1/2$. Искористимо тај ред за добијање горње и доње границе за логаритам. За доњу границу узмимо прва три члана реда, а за горњу остале чланове заменимо погодним геометријским редом. Добијамо

$$\frac{(x-1)(11x^2-7x+2)}{6x^3} < \log x < \frac{(x-1)(3x^3+13x^2-5x+1)}{12x^3}.$$

Те оцене нам дају $\log(4/3) > 55/192$, $\log 6 = \log 2 + \log 3 < 4753/2592$, $\log 1000 = 3(\log 2 + \log 5) < 30007/4000$ и $\log 2000 = 4\log 2 + 3\log 5 < 24599/3000$. Нека је $x \geqslant 2$. Ако искористимо да је $\sqrt{10} < 16/5$, $\log x < x$ и $\sqrt{x} < 5x/7$, добијамо

$$f(10^3x) > \frac{6907}{648}x - \frac{24599}{3000}.$$

Одатле следи

$$\pi(10^3x) - \pi\Big(\frac{10^3x}{2}\Big) > \frac{4}{81}\,\frac{863375x-664173}{4000x+30007},$$

што поново даје $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ за $x \geqslant 2000$.

6. За крај

Бертранов постулат спада међу проблеме теорије бројева у којима се испитују горње границе тзв. *празнина између простих бројева*, тј. разлика узастопних простих бројева. Нека су p_1, p_2, $\dots$ узастопни прости бројеви. Како нам Бертранов постулат говори у броју простих бројева у интервалу $(p_n, 2p_n-2)$, следи да је $p_{n+1} - p_n < p_n - 2$. Постоје и јаче претпоставке, какве су, на пример, *претпоставка Андрике* $p_{n+1} - p_n < 1 + 2\sqrt{p_n}$ и *Крамерова претпоставка* $p_{n+1} - p_n < C\log^2 p_n$ за неко константно $C > 0$. Међутим, изгледа да оруђа савремене математике нису дорасла тим изазовима. Тако један од највећих нерешених проблема математике, славна *Риманова хипотеза* у овом примеру обезбеђује само да важи $p_{n+1} - p_n < c\sqrt{p_n}\log p_n$. Baker, Harman и Pintz су 2001. године доказали да је $\varepsilon = 0{,}025$. Видети књигу [2, стр. 32] у којој читалац може наћи више сродних проблема.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, 5th ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.
2. R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd ed., Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.
3. J. Meher, M. Ram Murty, *Ramanujan's proof of Bertrand's postulate*, Amer. Math. Monthly **120** (2013), 650–653.
4. S. Ramanujan, *A proof of Bertrand's postulate*, J. Indian Math. Soc. **11** (1919), 181–182.

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, Slovenia

E-mail: aleksander.simonic@student.fmf.uni-lj.si