Ксу Јанхуи

О МЕТОДУ „ЈЕДАН ПРОБЛЕМ У ВИШЕ ВАРИЈАНТИ“ У КИНЕСКОЈ „БЈАНШИ“ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

1. Увод

Феномен успеха кинеских ученика је у протеклих неколико деценија постао предмет раматрања у истраживачким радовима на тему образовања. Упркос уобичајеном мишљењу да се кинески ученици образују у окружењу које није погодно за озбиљно учење, они су претекли многе од својих вршњака са запада. Тако су, на пример, остварили изузетне резултате из математике на следећим међународним испитивањима: Inetrnational Assesment of Educational Progress (IAEP), International Mathematical Olympiads (IMO), Trends in International Mathematics and Science Study и Programme for International Student Assesment (PISA).

Многи на западу сматрају да су кинсеки ученици оптерећени великом количином информација и да полажу строге испите. Међутим, они који су имали прилику да посматрају рад у кинеским учионицама, сведоци су да кинески професори математике уствари инспиришу ученике да самосатално мисле. На пример, они се труде да подстакну ученичке активности дајући им да решавају један проблем у више варијанти, један проблем са више решења, више проблема са истим решењем итд. На тај начин се избегавају унапред „утабане стазе“ и ствара осећај да су проблеми промењиви, те да захтевају различите методе приступа. „Учење кроз варијације“ је предложено као један такав приступ (в. [1]).

2. „Бјанши“ учење

Математички концепти се често презентују ученицима кроз примере, тако да их уочавање сличности у структури разних примера води до генерализације својстава, било математичких објеката, било односа међу њима. Притом су битне могуће варијације у презентованим примерима. Такозвано *бјанши* учење, посебно задаци *бјанши* типа, широко се користе у Кини и то је важна карактеристика кинеског математичког образовања. Наставници математике обично припремају задатке са постепеним изменама услова, што је важно за подстицање ученичког размишљања. Овакви задаци обично нису тешки, али помажу ученицима да са разумевањем усвоје нова знања. Сваки *бјанши* задатак садржи неку иновацију која помаже ученицима да стекну солидну основу и дођу до нових знања. Таква пракса такође помаже касније ученицима да се снађу у проблемима у реалном свету.

Гу са својим сарадницима (в. [2]) предлаже две врсте *бјанши* учења – концептуално и процедурално. У концептуалном *бјанши*-ју нестандардне репрезентације служе као варијације које подржавају појам. Процедурални *бјанши* се односи на коришћење низа премошћавања. На пример, пошто ученици реше основни задатак, наставник нуди низ других задатака који су мало другачији од изворног. Упоређујући ове различите задатке, ученици откривају општа правила. Гу и др. у књизи [2] идентификују три врсте могућих варијација: (1) промена услова задатка – проширивање основног задатка мењањем постављених услова и уопштавањем; (2) варирање поступка решавања задатка; (3) разноврсне примене сличних проблема. Слично, Цаи и Ни у [3] помињу три типа проблема с варијацијама у кинеској образовној математичкој пракси: један проблем са више решења, више проблема са једним сличним решењем и један проблем у више варијанти.

Предност *бјанши* проблема (који се обично дају у групи) над појединачним задацима је у постепеном повећању тежине и дубине задатка. На тај начин ученици, при учењу математике, не остају „на површини“, већ постепено схватају дубља математичка значења и структуре. Како се неки аспекти проблема не мењају, док су други променљиви, ученици се оспособљавају да виде опште помоћу појединачног, да уопштавају, као и да уоче посебне случајеве.

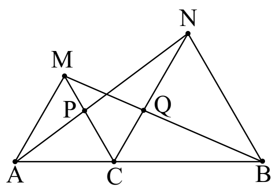
3. „Један проблем у више варијанти“ у „бјанши“ настави математике у Кини

Бјанши учење садржи неке од карактеристичних метода наставе математике у Кини. Оно је, као основни приступ, стално присутно у учионици. Тражење више решења једног задатка, примена одређене методе решавања на скуп повезаних проблема, као и варирање задатка да би се добио читав скуп међусобно повезаних, представљају основне вештине свих наставника математике у Кини. Као посебан облик *бјанши* учења, метод „један проблем у више варијанти“ присутан је у свакодневној пракси. Он је и проистекао из те праксе.

Метод „један проблем у више варијанти“ састоји се у варирању математичког задатка у више могућих праваца и његовом посматрању из више углова, задржавајући непромењену основну природу прблема. Мењајући позадину задатка или ослабљујући његове услове добијамо низ питања повезаних са оригиналним проблемом. На тај начин наставник охрабрује ученике да дубље размишљају о оригиналном задатку и боље повезују одговарајуће чињенице. Тако се, корак по корак, повећавају њихове креативне способности и боље разумеју структурне карактеристике проблема, учи како да се решавање проблема разбије на делове и да се поставе нови задаци.

Када је проблем решен, наставник обично подстиче даље истраживање његовог садржаја, форму, услове и закључке. Користећи метод „један проблем у више варијанти“, наставник помаже ученицима да сумирају методе решавања задатка и проналазе правила за решавање сличних задатака тако што налазе шта је „инваријантно у варијацијама“. Ово такође може помоћи ученицима да побољшају флексибилност свог размишљања. На тај начин се и подстиче њихова радозналост и жеља за знањем, као и активно учешће у процесу наставе. Коришћењем овог метода учи се путем аналогија и разликује посебно од општег, и тиме се култивише способност истраживања, чиме се развија начин математичког мишљења.

Галилеј је једном рекао: „наука је напредовање у процесу промене начина мишљења“. Када користе метод „један проблем у више варијанти“, наставници математике у Кини се труде да нагласак ставе на истраживачке активности приликом решавања задатака, не остајући на оригиналним проблему, већ на одговарајући и организован начин разматрају повезане проблеме како би дошли до дубљих закључака. Многи задаци и примери у кинеским уџбеницима су презентовани на описани начин, а наставници су оспособљени да помогну ученицима како би на најбољи начин искористили такве задатке.



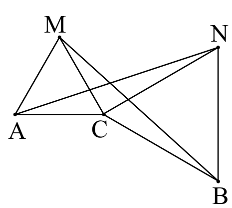
Слика 1

У наредном одељку дајемо три примера задатака оформљених по принципу „један проблем у више варијанти“ и њихова решења. Ово ће можда помоћи у разумевању „парадокса кинеских ученика“. На крају ћемо дискутовати вредност овог метода у настави математике.

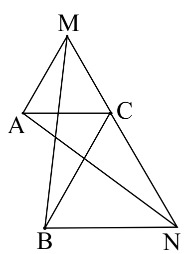
4. Три примера за метод „Један проблем у више варијанти“

Пример 1 (једноставан).

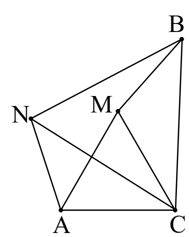
Како је показано на слици 1, нека је C тачка дужи AB. Нека су $\triangle ACM$ и $\triangle CBN$ једнакостранични троуглови. Доказати да је $AN = BM$.



Слика 2



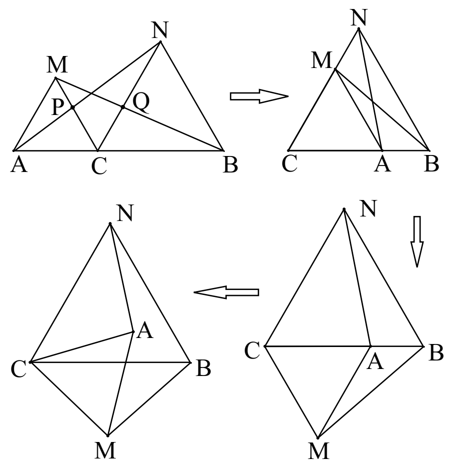
Слика 3



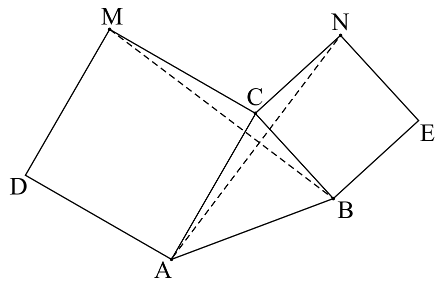
Слика 4

Варијација 1. Нека $\triangle CBN$ ротира за неки угао око тачке C, као што је показано на сликама 2–4. Испитатити да ли једнакост $AN = BM$ остаје на снази.

Варијација 2. Нека је $\triangle CBN$ фиксиран, а положај $\triangle ACM$ се мења као на слици 5. Испитатити да ли једнакост $AN = BM$ остаје на снази.



Слика 5



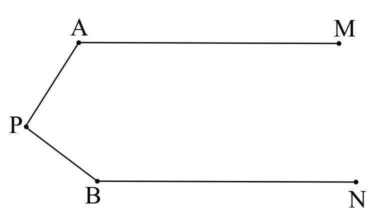
Слика 6

Варијација 3. Нацртати два квадрата над страницама $\triangle ABC$ као на слици 6. Испитати да ли важи једнакост $AN = BM$. Ако се поменути квадрати замене правилним петоугловима, шестоугловима, … , n-тоугловима, испитати да ли важи та једнакост.

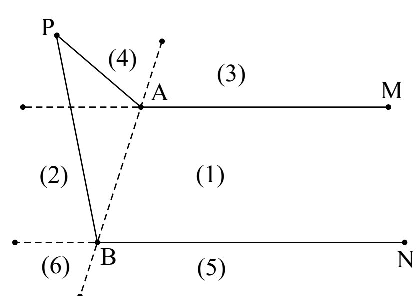
Без обзира које се од наведених промена полазног задатка изврше, увек је једноставно показати да је $\triangle ACN \cong \triangle MCB$ (инваријанта), па у сваком од случајева добијамо да важи $AN = BM$. Кроз претходно истраживање можемо сумирати структуралне карактеристике и општи метод за решавање оваквих проблема – (1) структура задатка: једнакост дужи повезана је са подударношћу троуглова; (2) општи метод: наћи два троугла чије су странице дужи чију једнакост доказујемо, па доказати подударност тих троуглова.

Пример 2 (нешто сложенији).

На слици 7 је $AM \parallel BN$. Одредити квантитативну везу између углова $\measuredangle APB$, $\measuredangle PAM$ и $\measuredangle PBN$.



Слика 7



Слика 8

Варијација 1. Ако се положај тачке P мења у равни одређеној правим AM и BN (услов $AM \parallel BN$ остаје да важи), одредити квантитативну везу између углова $\measuredangle APB$, $\measuredangle PAM$ и $\measuredangle PBN$.

Да бисмо учинили разматрање потпуним, класификујмо могуће ситуације према положајима покретне тачке P, слика 8. Уочавамо да треба посматрати шест делова равни у којима се може налазити та тачка; ти делови су добијени поделом равни помоћу правих AM, BN и AB. Добијамо следећих шест одговарајућих релација:

(1) $\measuredangle APB = \measuredangle PAM + \measuredangle PBN$, (2) $\measuredangle APB + \measuredangle PAM + \measuredangle PBN = 360°$,

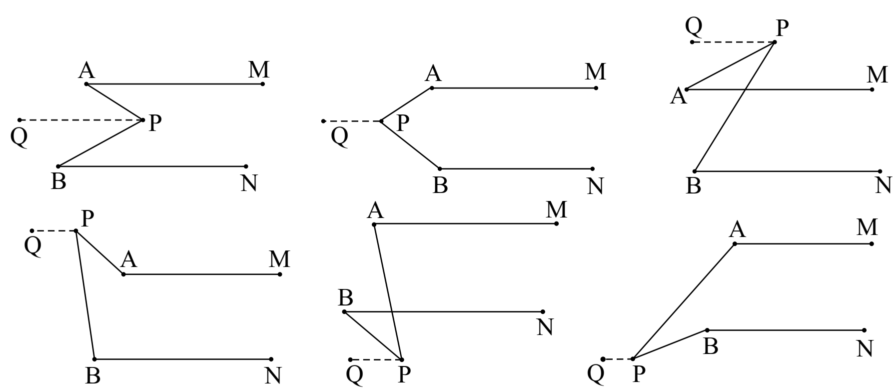
(3) $\measuredangle APB = \measuredangle PBN - \measuredangle PAM$, (4) $\measuredangle APB = \measuredangle PAM - \measuredangle PBN$,

(5) $\measuredangle APB = \measuredangle PAM - \measuredangle PBN$, (6) $\measuredangle APB = \measuredangle PBN - \measuredangle PAM$.

На пример, у случају (2), користећи помоћну тачку Q за коју је $PQ \parallel AM \parallel BN$ (слика 9), налазимо да је $\measuredangle PAM = \measuredangle APQ$ и $\measuredangle PBN = \measuredangle QPB$, па како је $\measuredangle APB + \measuredangle APQ + \measuredangle QPB = 360°$, то је и

$$\measuredangle APB + \measuredangle PAM + \measuredangle PBN = 360°.$$

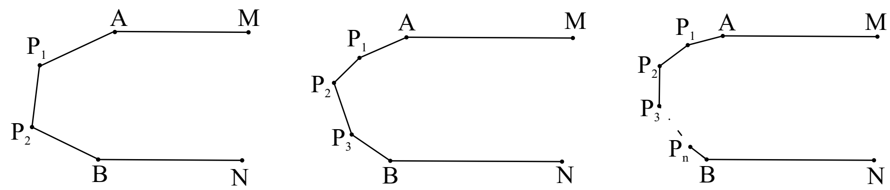
Даље, видимо да у случајевима (3) и (6), односно (4) и (5) добијамо исте резултате. Ако је тачка на граници двеју области, онда она задовољава обе одговарајуће релације.



Слика 9

Анализирајући решење у разним ситуацијама, видимо да, мада је тачка P у различитим положајима, метод конструисања помоћних линија и начин решавања задатка су скоро исти, као што се види на слици 9.

Варијација 2. Ако повећавамо број задатих елемената у задатку, можемо да уочимо какве се промене дешавају, а шта остаје непромењено. Посматрајмо ситуације као на слици 10, где је увек и даље $AM \parallel BN$. Ако повећавамо број тачака, тако да уместо једне тачке P добијамо две, три, …, n тачака P_1, P_2,



Слика 10

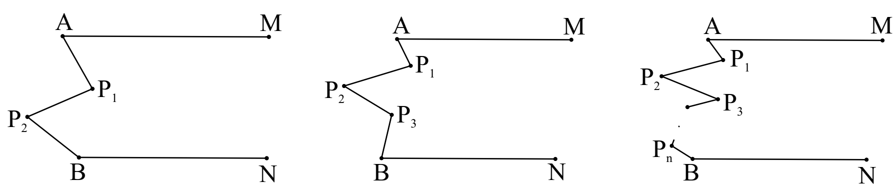
... , P_n, одредити квантитативну релацију између углова $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle P_1$, $\measuredangle P_2$, ... , $\measuredangle P_n$.

Истражујући, ученици лако налазе да важи

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle P_1 + \measuredangle P_2 + \cdots + \measuredangle P_n = (n+1) \cdot 180^\circ.$$

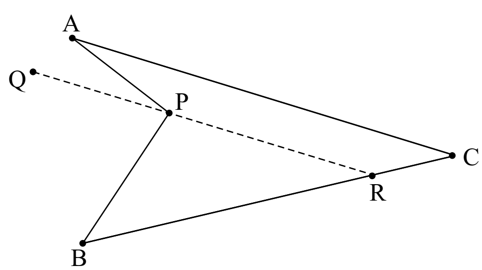
Збир тих углова се, дакле, мења са бројем тачака, али је метод решавања исти.

Варијација 3. Ситуација се даље може варирати као на слици 11. Проблем се опет може решити на исти начин.



Слика 11

Варијација 4. Нека се сада праве AM и BN секу у тачки C (слика 12). Одредити квантитативну везу између унутрашњих углова $\measuredangle P$, $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ и $\measuredangle C$ четвороугла $APBC$.



Слика 12

Слично као и раније, ако конструишемо праву кроз P, паралелну са AC, која сече BC у R, и изаберемо тачку Q као на слици 12, онда је $\measuredangle A = \measuredangle APQ$, $\measuredangle C = \measuredangle PRB$, па из

$$\measuredangle APB = \measuredangle APQ + \measuredangle BPQ = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle PRB = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$$

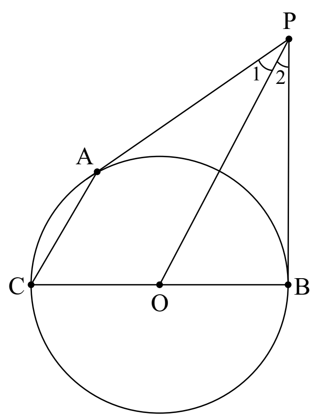
добијамо да је $\measuredangle P + \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 360^\circ$.

Кроз претходно истраживање можемо сумирати структуралне карактеристике и општи метод за решавање оваквих проблема – (1) структура задатка: веза између углова на слици формираној од полигона и паралелних правих; (2) општи метод: уочити погодне торуглове и поставити одговарајуће једнакости између углова; ако се услови не могу применити директно, конструкцијом погодних паралелних правих доћи до одговарајућих једнакости.

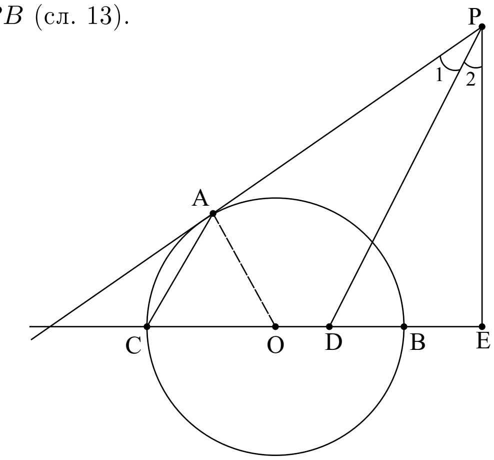
Пример 3 (најсложенији).

Из тачке P ван кружнице са центром O конструисане су тангенте PA и PB на ту кружницу (A и B су додирне тачке тих тангенти). Ако је BC пречник кружнице, доказати да је $AC \parallel PO$.

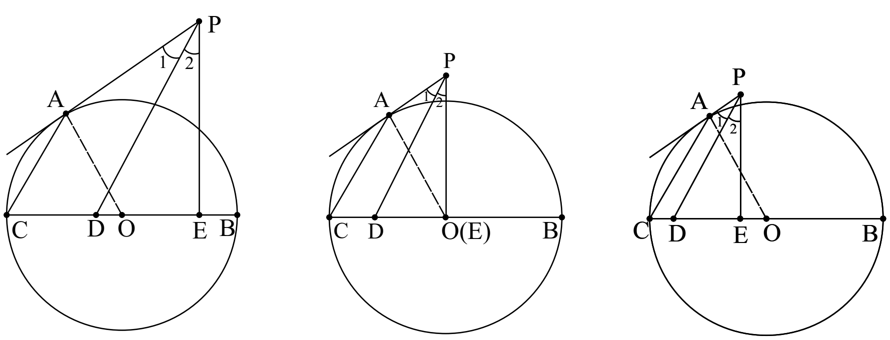
Да бисмо доказали да је $AC \parallel PO$, довољно је доказати да је $\measuredangle ACO = \measuredangle POB$. То се, пак, лако показује коришћењем једнакости $OA = OC$ и $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, као и услова $OA \perp PA$ и $OB \perp PB$ (сл. 13).



Слика 13

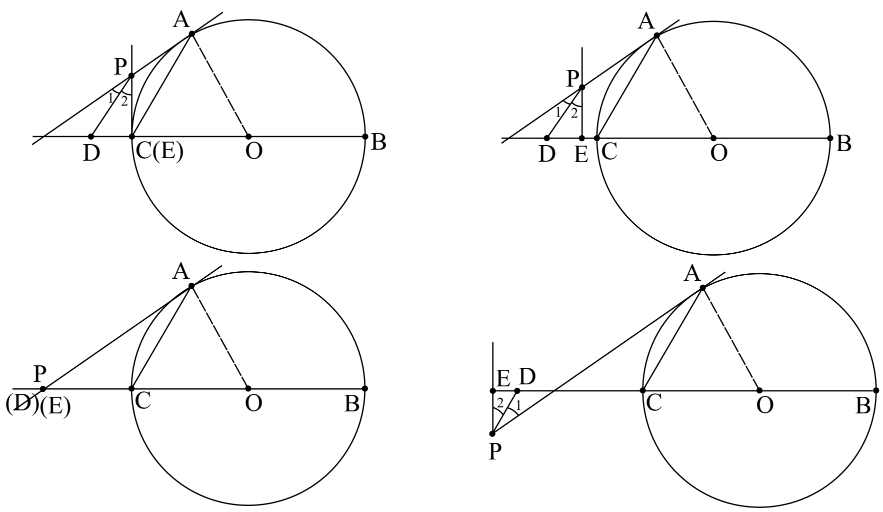


Слика 14



Слика 15a

Варијација 1. Задржавјући изабране тачке A, B и C и користећи, на пример, Geometer's Sketchpad, померамо тачку P дуж тангенте која додирује кружницу у тачки A. Означимо са E нормалну пројекцију нове тачке P на праву BC и са D пресек симетрале $\measuredangle APE$ са правом BC (слика 14). Препуштамо ученицима да активно истражују и дискутују међу собом, те да дођу до закључка да је $PD \parallel AC$, с тим да тачка E може заузимати различите положаје на правој BC. Ти положаји су приказани на сликама $15a, b$.



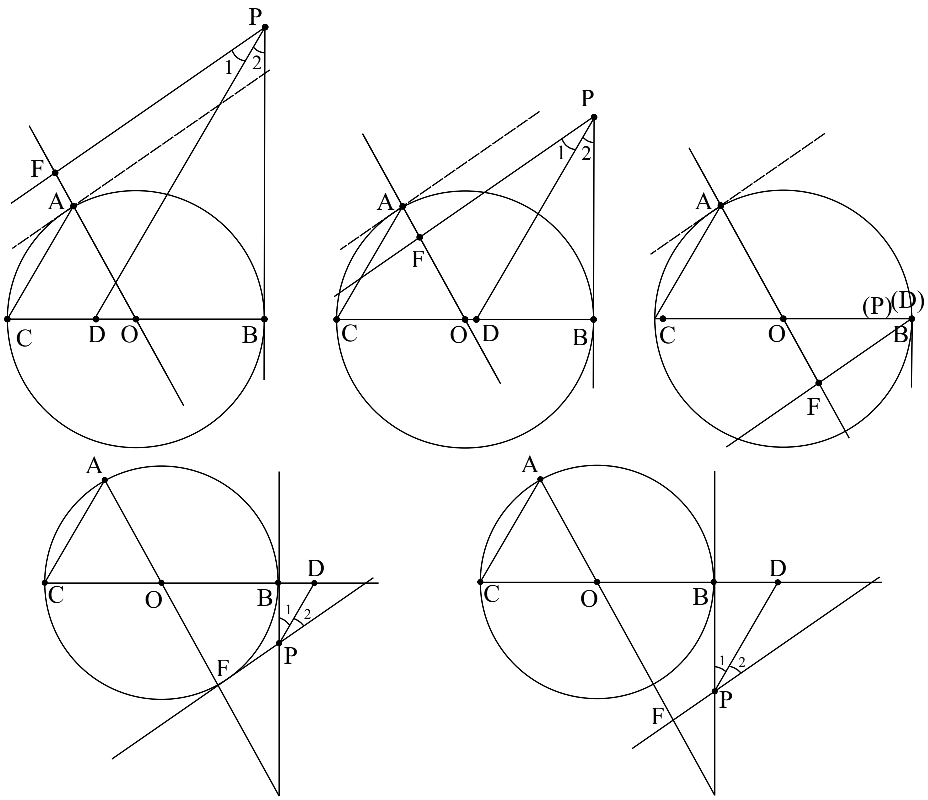
Слика 15b

Ако упоредимо нове слике са полазним задатком, видимо да се пречник BC, тангента PA и услов $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ нису променили – промена је у томе да PE више није тангента. Међутим, како је та права паралелна са полазном правом PB, нама потребан услов $\measuredangle ACO = \measuredangle PDE$ опет важи. Мада се слика променила, битни услови задатка нису. Ученици могу лако да закључе да су они инваријантни у односу на учињене промене.

Варијација 2. Затражимо од ученика да, као што су малопре померали праву PB, сада паралелно померају неке од других правих на цртежу и да виде да ли ће закључак $AC \parallel PD$ остати да важи. Ако сматрају да хоће, нека то и докажу. Сада је то постављено као отворен проблем.

Кроз посматрање и дискусију, ученици ће ускоро одлучити да се може паралелно померати права PA, као и права одређена пречником BC. Ученици закључују да се при паралелном померању праве PA (слика 16) битни услови неће променити, те ће закључак $AC \parallel PD$ моћи да се докаже на сличан начин.

Закључак је да је у математици важно да се занемаре небитне, површне карактеристике проблема. Ђаци треба да науче да уоче инваријантне односе који се скривају у проблему. Само на тај начин ће разумети срж проблема, а то им омогућује приступ „један проблем у више варијанти“.

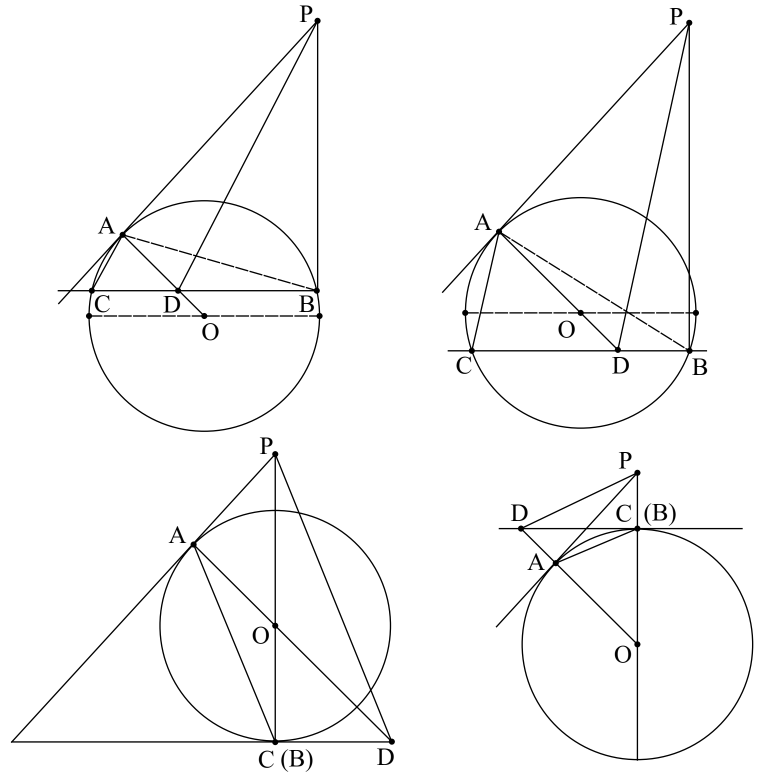


Слика 16

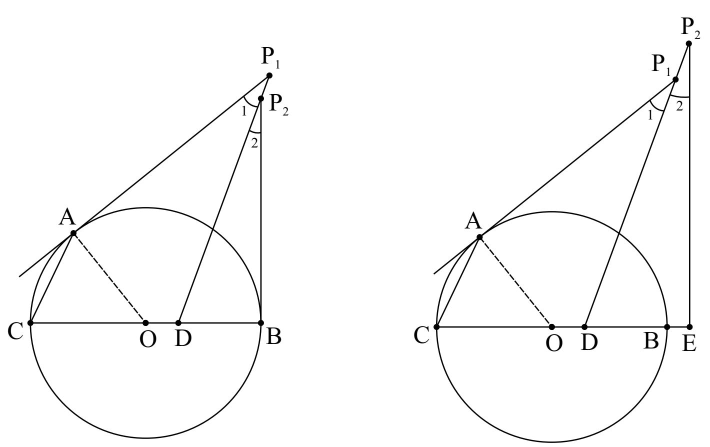
Настављајући да модификујемо слике, померајмо паралелно праву BC (слика 17). Пречник BC постаје сечица или тангента круга, PB више не мора бити тангента, а услов $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ не мора да важи. Међутим, услови нормалности се задржавају. На тај начин, тачке A, D, B, P припадају једној кружници. Ученици могу да наслуте да је и даље $AC \parallel PD$. Додајући једну помоћну праву (повезујући A и B), лако је доћи до закључка користећи знања о тетивном четвороуглу, периферијским угловима и углу између тангенте и тетиве.

Варијација 3. Уместо једне тачке P посматрајмо две тачке P_1 и P_2, али задржимо услов $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$. Да ли се при тој трансформацији и даље добија да је $AC \parallel PD$? Пустити да тачка P_2 клизи по правој P_1D. Посматрати, наслутити, а затим и доказати закључак (слике $18a, b$).

У овом случају, услов симетрале угла више не важи. Али квантитативни услови који су битни за доказ ($\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, $OA = OC$ и два услова нормалности) нису се променили. Зато се, у основи на исти начин, може доказати да је $AC \parallel PD$. То је „уочавање константности у променама“.

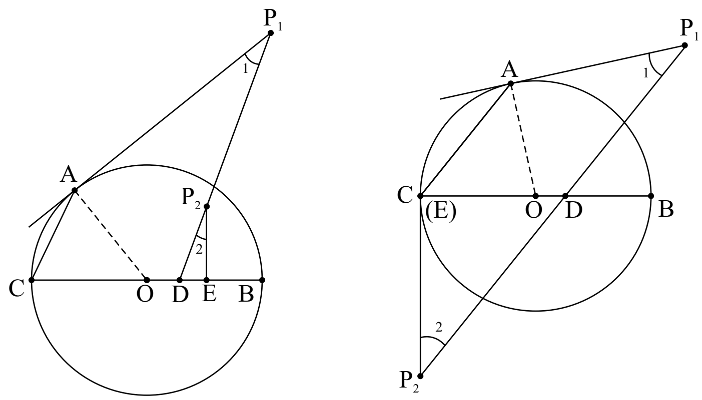


Слика 17



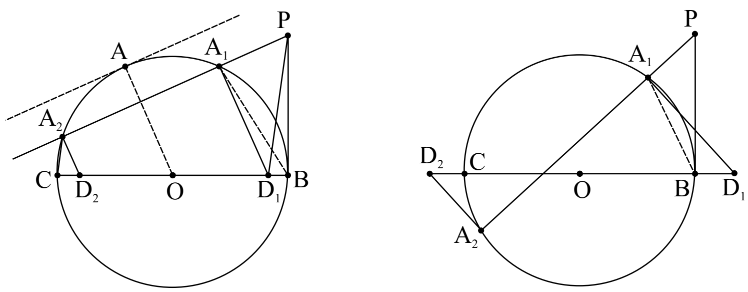
Слика 18a

Варијација 4. Померати тачку P и паралелно померати тангенту PA тако да постане сечица кружнице. Заменити тачку A двема тачкама A_1 и A_2, а дуж AO са две дужи A_1D_1 и A_2D_2, нормалне на праву која садржи тачке P, A_1 и A_2



Слика 18*b*

(слика 19). Која је сада права паралелна са A_2C? Ученици лако наслућују да је то права PD_1. Да ли је тај закључак тачан? Свакако, треба га доказати.

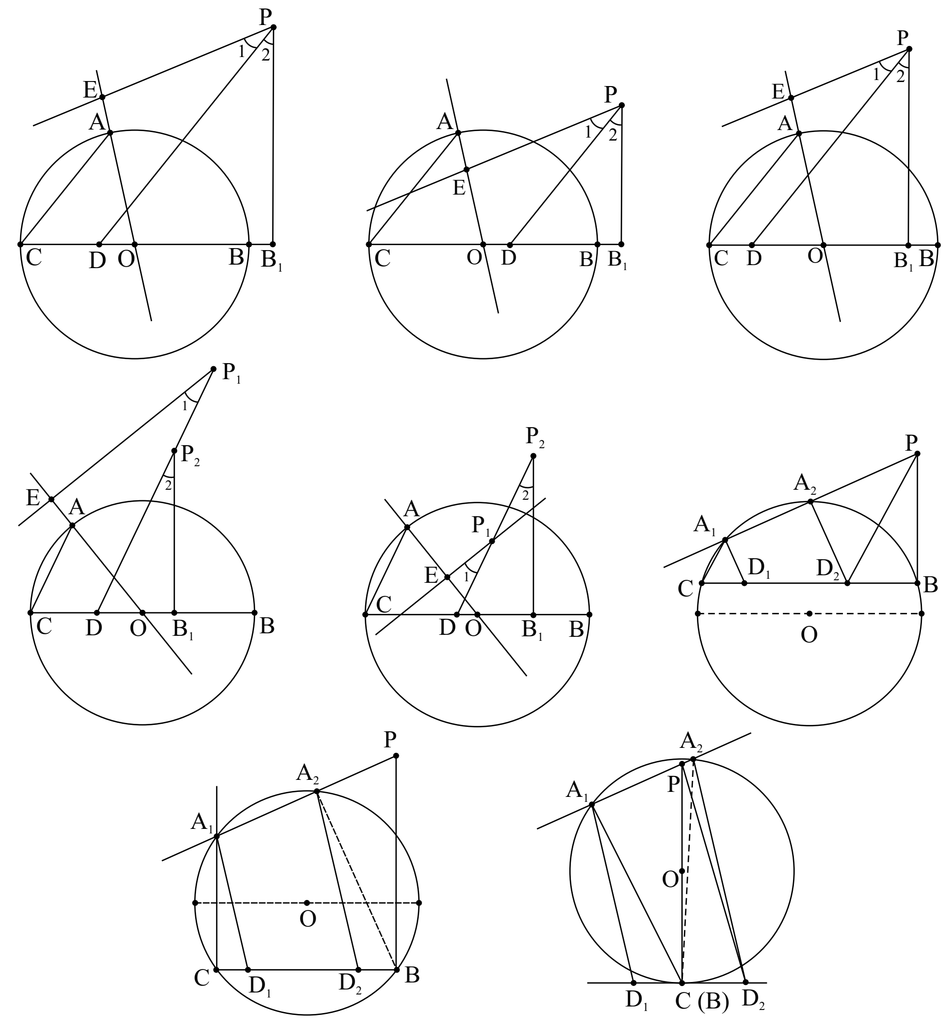


Слика 19

Наставник и ученици заједнички анализирају ову варијацију и налазе шта је сада инваријантно. Услов $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ више не постоји, али услови нормалности су остали и сада постоје два тетивна четвороугла. Користећи теореме о тетивном четвороуглу и о периферијским угловима, може се доказати да је наслућени закључак тачан.

Позивајући се на горње варијанте проблема, наставник може сада навести ученике да даље истражују и добију нове варијанте овог задатка, као на слици 20.

На основу свега изложеног можемо да сумирамо структурне карактеристике и опште методе оваквих задатака: (1) структура проблема: релације између углова базираних на теореми о периферијском углу, теореми о углу између тангенте и тетиве, као и теореми о тетивном четвороуглу; (2) општи метод: наћи односе међу угловима, установити које једнакости важе; ако се услови не могу директно применити, конструисати помоћне линије да би се дошло до потребних релација између углова.



Слика 20

5. Закључак

У настави математике основни је задатак да се унапреди квалитет размишљања ученика, као и њихова способност да истражују приликом решавања задатака. Ученици треба да имају активну улогу у том процесу, тако да се способност њиховог размишљања може ефективно култивисати и развијати. Из наведена три примера коришћења метода „један проблем у више варијанти“ може се видети да наставници математике у Кини по правилу бирају ситуације у којима су садржане релације, које често није лако открити, а које су битне за решавање задатка. Затим се корак-по-корак формирају све теже варијације почетног задатка, али у којима су претходно уочене релације и даље присутне, те је решење и даље могуће на сличан начин. На тај начин, наставници подстичу ученике да размишљају и самостално долазе до закључака. Такође, задаје им се да сами постављају нове сличне проблеме, варирањем датог, и да траже „инваријанте у варијацијама“, како би схватили у чему је срж проблема.

Коришћењем овог метода у учионици, кинески наставници чине интересантнијом наставу математике која је често оптерећена дугачким извођењима и доказима. Путем експериментисања, до тада статичке слике или симболи попримају динамичку димензију. Тако се механичко прихватање математичких чињеница и закључака замењује истраживањем и закључивањем од стране самих ученика. Задатак наставника је притом да усмерава ученика да обрате пажњу на везе између објеката, као и да комбинују стара и нова знања. Основно је, при оваквом приступу, открити који, можда скривени, односи између објеката у задатку се нису променили, мада је сам задатак измењен.

Варијације математичког задатка могу бити бескрајне. Наставник често указује само на неке од могућности, препуштајући ученицима да сами проналазе даље варијанте на које ће моћи да се примени иста или слична методологија решавања. Све ово помаже ученицима да открију хоризонталну и вертикалну повезаност математичког знања, што доприноси квалитету њиховог схватања математике. Ово је можда једна од тајни успеха наставе математике у Кини.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Zhang, D., Dai, Z., *The "Two basis" mathematics teaching approach and open ended problem solving in China*, Regular lecture delivered at the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark, 2004. Retrieved from `http://www.icme10.dk/Proceedings/pages/regular_pdf/RL_Zhang,%20Dianzhou%and%20Zaiping%20Dai.pdf`

[2] Gu, L., Huang, R., Marton, F., *Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective mathematics learning*, In: L. Fan, N. Y. Wong J. Cai, S. Li (Eds.), *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 309–347). Singapore: World Scientific, 2004.

[3] Cai, J., Nie, B., *Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice*, ZDM Mathematics Education, **39** (2007), 459–475.

[4] Sun, X., *"Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples*, Educational Studies in Mathematics **76** (2011), 65–85.

[5] Watson, A., Mason, J., *Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making*, Mathematical Thinking and Learning, **8** (2) (2006), 91–111.

[6] Watson, A., *Pedagogy of variations: Synthesis of various notions of variation pedagogy*, In: Huang, R., Li, Y. (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories*, pp. 85–103). Rotterdam: Sense Publishers, 2017.

Xu Yanhui, Department of Mathematics, Wenzhou University, Zhejiang Wenzhou 325035, China

E-mail: `wzxuyanhui@126.com`