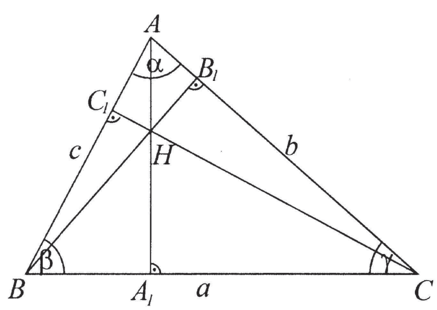
**Др Шефкет Арсланагић**

## ЈЕДНА ТЕОРЕМА У ВЕЗИ ОШТРОУГЛОГ ТРОУГЛА И ЊЕНА ПРИМЈЕНА

У овом чланку ћемо доказати једну занимљиву теорему која важи за оштроугли троугао и даћемо неколико примјера њене примјене. Та теорема гласи:

*У оштроуглом троуглу* $ABC$ *чији је ортоцентар тачка* $H$, *а* $R$ *и* $r$ *су полупречници описане и уписане кружнице, важи једнакост*

(1) $$AH + BH + CH = 2(R + r).$$




*Доказ.* Из правоуглог троугла $ACC_1$ (слика) имамо да је $\cos\alpha = \dfrac{AC_1}{b} = \dfrac{AC_1}{2R\sin\beta}$, тј.

(2) $$2R\cos\alpha = \frac{AC_1}{\sin\beta}.$$

У правоуглом троуглу $BAA_1$ је $\measuredangle BAA_1 = 90^\circ - \beta$, па је $\measuredangle C_1AH = 90^\circ - \beta$. Из правогуглог троугла $C_1AH$ имамо да је $\cos\measuredangle C_1AH = \dfrac{AC_1}{AH}$, па из претходног следи да је $\cos(90^\circ - \beta) = \dfrac{AC_1}{AH}$, односно

(3) $$AC_1 = AH\sin\beta.$$

Сада из (2) и (3) слиједи

(4) $$AH = 2R\cos\alpha.$$

Аналогно добијамо и једнакости

$$BH = 2R\cos\beta \quad \text{и} \quad CH = 2R\cos\gamma. \tag{5}$$

Сабирањем једнакости (4) и (5) добијамо

$$AH + BH + CH = 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma). \tag{6}$$

Користићеко даље познате тригонометријске једнакости

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{и} \quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}.$$

Из тих једнакости слиједи да је

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}. \tag{7}$$

Коначно, из (6) и (7) добијамо

$$AH + BH + CH = 2R\Big(1 + \frac{r}{R}\Big) = 2(R + r),$$

а ово је једнакост (1) коју је требало доказати. ■

Даћемо сада неколико посљедица ове једнакости.

Прво ћемо дати два занимљива доказа познате Ојлерове неједнаксоти

$$R \geqslant 2r. \tag{8}$$

*Доказ 1.* Како је $R = \dfrac{abc}{4P}$ и $r = \dfrac{P}{s}$, гдје је $P$ површина троугла $ABC$, а $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ његов полуобим, то имамо сљедећи низ еквиваленција:

$$\begin{aligned}
R \geqslant 2r &\iff \frac{abc}{4P} \geqslant 2\,\frac{P}{s}\\
&\iff abc \geqslant 8\,\frac{P^2}{s}\\
&\iff abc \geqslant 8\,\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \quad \text{(Херонов образац)}\\
&\iff abc \geqslant 8\,\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}.\\
&\iff abc \geqslant (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Да бисмо доказали неједнакост (9), увешћемо смјене $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ $(x, y, z > 0)$, па добијамо да је та неједнакост еквивалентна неједнакости

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

Последња неједнакост се добија множењем неједнакости

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad y + z \geqslant 2\sqrt{yz}, \quad z + x \geqslant 2\sqrt{zx}.$$

Тиме је и неједнакост (8) доказана. ■

*Доказ 2.* Примјењујући неједнакост између аритметичке и хармонијске средине на (позитивне) бројеве $r_a$, $r_b$ и $r_c$ (полупречнике споља уписаних кружница троугла $ABC$) добјамо да је

$$\frac{r_a+r_b+r_c}{3} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}},$$

односно

$$(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right) \geqslant 9. \tag{10}$$

Како је $r_a=\dfrac{P}{s-a}$, $r_b=\dfrac{P}{s-b}$ и $r_c=\dfrac{P}{s-c}$, то лако добијамо једнакости:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r, \quad r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=s^2 \quad \text{и} \quad r_ar_br_c=rs^2.$$

Користећи ове једнакости, из неједнакости (10) добијамо, редом,

$$(4R+r)\cdot\frac{s^2}{rs^2} \geqslant 9, \quad 4R+r \geqslant 9r, \quad 4R \geqslant 8r, \quad R \geqslant 2r,$$

што је требало доказати. Једнакост у (8) важи ако и само ако је $r_a=r_b=r_c$, тј. ако и само ако је $a=b=c$, дакле ако је у питању једнакостранични троугао. ∎

Напомена 1. Више разних доказа (осим горња два) може се наћи у [1], [2] и [3].

Посљедица 1. $6r \leqslant AH+BH+CH \leqslant 3R$. Једнакост важи ако и само ако је $R=2r$, тј. за једнкостранични троугао.

Користећи ову посљедицу, доказаћемо сљедеће три неједнакости.

$$\text{а)}\quad \frac{AH^2}{s-a}+\frac{BH^2}{s-b}+\frac{CH^2}{s-c} \geqslant \frac{36r^2}{s}; \tag{11}$$

$$\text{б)}\quad \frac{AH^2}{a}+\frac{BH^2}{b}+\frac{CH^2}{c} \geqslant \frac{18r^2}{s}; \tag{12}$$

$$\text{в)}\quad AH\operatorname{tg}\alpha+BH\operatorname{tg}\beta+CH\operatorname{tg}\gamma \leqslant 3R\sqrt{3}. \tag{13}$$

*Доказ.* а) На основу неједнакости Коши-Буњаковски-Шварца (CBS) имамо сљедећу неједнакост:

$$\begin{aligned}(AH+BH+CH)^2 &= \left(\frac{AH}{\sqrt{s-a}}\sqrt{s-a}+\frac{BH}{\sqrt{s-b}}\sqrt{s-b}+\frac{CH}{\sqrt{s-c}}\sqrt{s-c}\right)^2\\ &\leqslant \left(\frac{AH^2}{s-a}+\frac{BH^2}{s-b}+\frac{CH^2}{s-c}\right)\left[(s-a)+(s-b)+(s-c)\right],\end{aligned}$$

што је еквивалентно са

$$\frac{AH^2}{s-a}+\frac{BH^2}{s-b}+\frac{CH^2}{s-c} \geqslant \frac{(AH+BH+CH)^2}{3s-(a+b+c)},$$

а одавде на основу посљедице 1 слиједи неједнакост (11).

б) Поново на основу неједнакости (CBS) имамо да важи

$$
\begin{aligned}
(AH+BH+CH)^2 &= \left(\frac{AH}{\sqrt{a}}\sqrt{a}+\frac{BH}{\sqrt{b}}\sqrt{b}+\frac{CH}{\sqrt{c}}\sqrt{c}\right)^2\\
&\leqslant \left(\frac{AH^2}{a}+\frac{BH^2}{b}+\frac{CH^2}{c}\right)\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right],
\end{aligned}
$$

односно

$$\frac{AH^2}{a}+\frac{BH^2}{b}+\frac{CH^2}{c}\geqslant\frac{(AH+BH+CH)^2}{a+b+c},$$

а одавде на основу посљедице 1,

$$\frac{AH^2}{a}+\frac{BH^2}{b}+\frac{CH^2}{c}\geqslant\frac{36r^2}{2s},$$

тј. неједнакост (12).

в) Из једнакости (4) добијамо да је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2R\sin\alpha}{2R\cos\alpha}=\dfrac{a}{AH}$, одакле је $AH\operatorname{tg}\alpha=a$. Аналогно добијамо $BH\operatorname{tg}\beta=b$ и $CH\operatorname{tg}\gamma=c$. Сабирањем посљедње три једнакости добијамо

$$AH\operatorname{tg}\alpha+BH\operatorname{tg}\beta+CH\operatorname{tg}\gamma=2s. \tag{14}$$

На основу неједнакости 5.3 из [4], стр. 49, која гласи

$$2s\leqslant 3R\sqrt{3},$$

добијамо на основу (14) неједнакост (13).

Једнакост у (11), (12) и (13) важи само у случају једнакостраничног троугла. ■

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promer d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 6*, Grafičar promer d.o.o., Sarajevo, 2014.

[4] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.



Универзитет у Сарајеву, Босна и Херцеговина

*E-mail*: asefket@pmf.unsa.ba