Весна Бал

РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Архитектонска техничка школа у Београду

Ову тему излагала сам на два часа у Архитектонској техничкој школи. Садржај овог чланка је допуњени и проширени материјал са тог излагања[1]. Циљ предавања је да ученици са потпуним разумевањем усвоје појам рационалног броја, својства скупа рационалних бројева, својства операција на скупу рационалних бројева и да се на тај начин припреме да са разумевањем усвоје и појам реалног броја.

1. Дефиниција скупа рационалних бројева

Природни бројеви су се појавили као резултат пребројавања, а прво проширење појма броја било је додавање разломака скупу природних бројева. Појам разломка везан је са потребом мерења величина. Мерење било које величине састоји се у њеном упоређивању с другом величином коју узимамо за јединичну. На пример, при мерењу дужине одсечка (дужи), на њега наносимо други одсечак који се узима да има јединичну дужину (1 cm, 1 m итд). Јасно је да се неће увек јединични одсечак садржати цео број пута у одсечку који се мери. Тако настаје потреба посматрања разломака – половине, четвртине и других делова јединице мерења.

Са развојем аритметике људи су почели да разматрају разломљени број (разломак), као количник двају природних бројева. Уопште, разломком су најпре називани бројеви облика $\dfrac{m}{n}$, где су m и n природни бројеви.

Даље проширење појма броја било је изазвано потребама саме математике. У вези са решавањем линеарних једначина с једном непозатом постало је неопходно увођење негативних бројева.

Посебно је јасно истакнут смисао негативних бројева увођењем координатне осе и координатне равни. Важан моменат у математици било је увођење броја нула. Додавање нуле и негативних бројева скупу природних бројева доводи до

[1] Мишљење је редакције часописа да већи део овог материјала може бити излаган и ученицима основних школа

скупа целих бројева. Скуп целих бројева (позитивних целих, нуле и негативних целих) означавамо словом $\mathbf{Z}$, тј.

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Док је скуп $\mathbf{N}$ затворен у односу две операције – сабирање и множење, скуп $\mathbf{Z}$ је затворен у односу на три операције: сабирање, одузимање и множење. Посебно, за произвољне природне бројве a и b једначина $a + x = b$ је увек решива, али је само за $b > a$ одговарајућа вредност x природан број.

Скуп $\mathbf{Z}$ није затворен у односу на дељење. На пример, једначине $2x = 3$ и $1 - 5x = 105$ немају решења у скупу $\mathbf{Z}$. Због тога се скуп $\mathbf{Z}$ даље проширује („утапа се“) у нови скуп бројева, у коме се налазе решења оваквих једначина. Елементи тог скупа су *разломци* облика $\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$; p је бројилац, а q именилац тог разломка.

Разломке називамо још и *рационалним бројевима* (латински ratio – однос), а скуп који они образују означавамо са $\mathbf{Q}$, дакле

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Једнакост разломака дефинише се на следећиначин:

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad \text{ако и само ако} \quad pq' = p'q.$$

Користећи ову дефиницију, лако је доказати једнакост $\dfrac{p}{q} = \dfrac{pn}{qn}$ за $n \in \mathbf{Z}$. Ово је важно својство разломака: *ако се бројилац и именилац разломка помноже истим целим бројем, добија се разломак једнак са датим разломком.* Кажемо да се тако разломак *проширује*.

Међутим, важи и обратно: $\dfrac{pn}{qn} = \dfrac{p}{q}$, $n \in \mathbf{Z}$ – кажемо да се разломак *скраћује* ако се бројилац и именилац разломка поделе једним истим целим бројем.

Пример 1. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} = \cdots$: $\dfrac{-3}{7} = \dfrac{18}{-42} = \cdots$; $\dfrac{8}{5} = \dfrac{-24}{-15} = \cdots$; итд.

У овом примеру видимо да вршимо класификацију разломака према једнакости, па је у овој ситуацији имплицитно садржана *реалација еквиваленције.* Тако смо у претходном примеру уочили три дисјунктне класе скупа $\mathbf{Q}$ чији су стандарни представници: $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-3}{7}$, $\dfrac{8}{5}$; међутим, они могу бити, на пример, замењени, редом, са: $\dfrac{3}{6}$, $\dfrac{18}{-42}$, $\dfrac{-24}{-15}$.

Елементе скупа $\mathbf{Z}$ налазимо међу брјевима облика $\dfrac{p}{1}$, $p \in \mathbf{Z}$. На пример: $\dfrac{3}{1} = 3$, $\dfrac{-5}{1} = -5$, $\dfrac{0}{1} = 0$.

Знамо да је $\dfrac{-p}{q} = \dfrac{p}{-q}$ (разломак $\dfrac{-p}{q}$ смо проширили са -1). Уводимо ознаку $-\dfrac{p}{q} = \dfrac{-p}{q}$ и кажемо да је $-\dfrac{p}{q}$ супротан број броју $\dfrac{p}{q}$. Важи $\dfrac{p}{q} + \left(-\dfrac{p}{q}\right) = 0$.

Број $\frac{q}{p}$ зовемо реципрочним броју $\frac{p}{q}$ и пишемо $\frac{q}{p} = \left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$. Важи $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$.

Скуп рационалних бројева затворен је у односу на све четири алгебарске операције: сабирање, одузимање, множење и дељење (сем дељења нулом). Извођење операција са рационалним бројевима своди се на операције са целим бројевима. Тако се дефинише:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} + \frac{r}{s} &= \frac{ps+qr}{qs},\\
\frac{p}{q} - \frac{r}{s} &= \frac{ps-qr}{qs},\\
\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} &= \frac{pr}{qs},\\
\frac{p}{q} : \frac{r}{s} &= \frac{ps}{qr} \text{ за } r \neq 0.
\end{aligned}$$

Уочимо следећа својства ових операција:

(1) За $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ и $n \in \mathbf{N}$ је $(-n) \cdot \frac{p}{q} = \frac{-np}{q}$.

(2) За $n \in \mathbf{N}$ и $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ је $n \cdot \frac{-p}{q} = \frac{-np}{q}$.

(3) За $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ и $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ важи $m \cdot \frac{np}{q} = (mn) \cdot \frac{p}{q}$.

Задаци

1. Образложи следеће једнакости: $\frac{3}{6} = \frac{-99}{-198}$, $\frac{13}{11} = \frac{26}{22}$, $\frac{8192}{-72} = \frac{-3072}{27}$.
2. Одреди неколико чланова класе еквиваленције разломка $\frac{41}{-12}$ у односу на релацију $=$.
3. Наведи који су од следећих разломака једнаки неком целом броју: $\frac{0}{17}$, $\frac{-99}{-39}$, $\frac{45}{5}$, $\frac{-45}{3}$, $\frac{12}{36}$, $\frac{17}{1}$.
4. Покажи да за $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbf{Q}$ важи једнакост $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right)$.
5. Изврши назначене операције: $-\frac{5}{3} + \frac{17}{2}$, $\frac{4}{19} - \frac{5}{20}$, $\frac{13}{25} \cdot \frac{-14}{26}$, $\frac{-3}{5} : \frac{15}{4}$.
6. Одреди реципрочне бројеве бројевима: 7, $\frac{1}{5}$, $\frac{-3}{5}$, $3\frac{1}{2}$, -1, 1.
7. Објасни зашто је: (а) $-\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$; (б) $\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\right)^{-1} = \frac{p}{q}$.

2. Својства операција $+$ и $\cdot$ у скупу $\mathbf{Q}$

(1) За свака три броја a, b и c из скупа $\mathbf{Q}$ важи $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(2) За сваки број a из Q је $a + 0 = a$.

(3) За сваки број a из $\mathbf{Q}$, постоји број $-a$ из $\mathbf{Q}$ тако да је $a + (-a) = 0$.

(4) За свака два броја a и b из $\mathbf{Q}$ важи $a + b = b + a$.

(5) За свака три броја a, b и c из $\mathbf{Q}$ важи $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(6) За сваки број a из $\mathbf{Q}$ је $a \cdot 1 = a$.

(7) За сваки број a из $\mathbf{Q}$ различит од броја 0 постоји број a^{-1} из $\mathbf{Q}$ такав да је $a \cdot a^{-1} = 1$.

(8) За свака два броја a, b из $\mathbf{Q}$ је $a \cdot b = b \cdot a$.

(9) За свака три броја a, b и c из $\mathbf{Q}$ важи $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Због претходних својстава кажемо да је тројка $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ *поље рационалних бројева.*

Задаци

8. Израчунај: (а) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(6 - \frac{1}{8}\right)$; (б) $\left(\frac{8}{7} + \frac{3}{5}\right)^2$; (в) $\left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; (г) $\frac{1}{7} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; (д) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{8} : 9\right)$; (ђ) $\frac{17}{4} - \frac{3}{5} : \frac{15}{4}$.

9. Нека је $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{12}$. Одреди: (а) $f(1)$; (б) $f(-5)$; (в) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; (г) $f(f(1))$; (д) ако је $f(x, y) = 2x^2y - 3xy + \frac{1}{3}$, одреди: $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $f\left(-1, \frac{1}{9}\right)$.

3. Поредак на скупу рационалних бројева

Најпре дајемо следећу дефиницију: разломак је *позитиван* ако се може представити као количник двају природних бројева; рационалан број различит од нуле је *негативан* ако није позитиван.

Наводимо следећа својства:

(10) За сваки број a из $\mathbf{Q}$ важи тачно једна од релација: $a < 0$ или $a = 0$ или $a > 0$.

(11) За свака два броја a и b из $\mathbf{Q}$ услови $a > 0$ и $b > 0$ повлаче да је $a + b > 0$ и $a \cdot b > 0$.

(12) За свака два броја a и b из $\mathbf{Q}$, важи $a < b$ ако и само ако је $a - b < 0$.

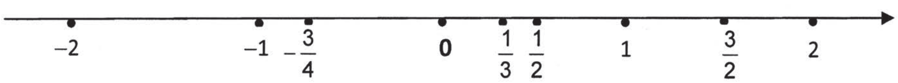
Пример 2. Бројеви 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{-3}$, $\frac{3}{7}$, припадају позитивним бројевима.

Бројеви $-\frac{2}{3}$, -2, $\frac{-2}{3}$ припадају негативним бројевима.

Пример 3. $\frac{1}{7} < \frac{3}{5}$, јер је $\frac{1}{7} - \frac{3}{5} = \frac{-16}{35}$, а $\frac{-16}{35} < 0$ (својство 12); $\frac{-3}{5} < 0$; $-\frac{1}{2} < \frac{1}{1000}$ (својство 10); $-\frac{5}{7} < -\frac{1}{2}$, јер је $\frac{1}{2} < \frac{5}{7}$.

Важно је запазити још једно својство рационалних бројева: *између свака два рационална броја налази се бесконачно много рационалнх бројева.* Заиста, ако су a и b различити рационални бројеви и $a < b$, онда рационалан број $\dfrac{a+b}{2}$ лежи између њих: $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. Поступајући аналогно даље, може се доказати да се између a и b налази бесконачно много рационалних бројева.

Сваком рационалном броју одговара јединствена тачка бројевне осе, при чему двама различитим рационалним бројевима одговарају две различите тачке. Без обзира на то што рационални бројеви имају претходно описано својство (зовемо га и „својство густине“), они ипак не „испуњавају“ целу бројевну осу, тј. постоје тачке на оси којима не одговара ниједан рационалан број (о томе ће се детаљније говорити приликом увођења реалних бројева).



Задаци

10. Поређај у растући низ: $-\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{4}{15}$, 0, -8, $2\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{9}$, $-\dfrac{5}{4}$.

11. Образложи зашто је: $\dfrac{13}{27} < \dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{3}{5} < 0$, $1 + \dfrac{1}{4} > -\dfrac{5}{4}$.

12. На бројевној оси одреди тачке које одговарају бројевима: $5\dfrac{1}{7}$, $-\dfrac{32}{20}$, $\dfrac{1}{6}$, 2, -6, $\dfrac{17}{3}$, $\dfrac{55}{105}$.

13. Одреди неколико бројева који су: (а) већи од $-\dfrac{1}{7}$, а мањи од $\dfrac{1}{7}$; (б) већи од нуле, а мањи од $\dfrac{1}{2}$; (в) већи од -3, а мањи од $-2\dfrac{9}{10}$.

14. Покажи да између бројева $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{4}{5}$ постоје рационални бројеви. Наведи три таква броја.

15. Апсолутна вредност дефинише се на скупу $\mathbf{Q}$ на следећи начин: за $x \in \mathbf{Q}$ је:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{за } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{за } x < 0. \end{cases}$$

Одреди: (а) $|8|$; (б) $\left|-\dfrac{1}{4}\right|$; (в) $\left|-\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9}\right|$; (г) $|(-2)^3|$.

16. Који су то разломци $\dfrac{p}{q}$ за које важи $\left|\dfrac{p}{q}\right| < 1$?

4. Децимални запис рационалног броја

Посебно важну улогу у математици и пракси имају децимални разломци. Познато је да се сваки природан број може на јединствен начин раставити на просте чиниоце. Ако се такав растав имениоца неког скраћеног разломка састоји само од двојки, или само од петица, или само од двојки и петица, тада се такав разломак може записати у облику коначног децималног разломка.

Пример 4. $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}=0{,}6$; $\frac{7}{20}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}=\frac{35}{100}=0{,}35$; $\frac{9}{5}=\frac{9\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{18}{10}=1{,}8$.

Исти резултат се може добити дељењем бројиоца разломка имениоцем.

Ако је, пак, разломак нескратив и разлагање имениоца на просте чиниоце садржи бар један број различит од двојке и петице, тада се такав број може записати у облику бесконачног периодичног децималног броја, тј. децималног броја код којег је број децималних знакова бесконачан и једна цифра или неколико цифара после запете се стално понављају. Представимо, на пример, разломак $\frac{2}{3}$ у виду децималног разломка. Поделивши број 2 бројем 3, добијамо $0{,}666\ldots$. Тај бесконачан разломак називамо *периодичним*; цифру 6 називамо *периодом* разломка. Краткоће записа ради, период се записује само једном, с тим да се окружи заградама. На пример, $\frac{2}{3}=0{,}(6)$ (чита се: „нула целих и 6 у периоди“).

Период у разломку може да не почиње одмах иза запете, а може и да садржи више од једне цифре (или обоје). На пример:

$$2\frac{16}{15}=3{,}066\cdots=3{,}0(6);\quad \frac{5}{11}=0{,}454545\cdots=0{,}(45);\quad \frac{611}{495}=1{,}2(34).$$

Ако се у процесу дељења бројиоца разломка имениоцем појави остатак једнак нули а процес дељења се настави, тада ће сви даљи остаци и све цифре количника бити нуле. Зато се природни бројеви, нула и коначни децимални разломци могу сматрати бесконачним децималним разломцима са периодом који се састоји од нуле: $2=2{,}00\cdots=2{,}(0)$; $\frac{2}{5}=0{,}4=0{,}4(0)$, итд.

Договор је и да се децимални број с периодом 9 замењује бројем с периодом 0 (с тим да се претходна цифра увећа за 1), на пример, $0{,}(9)+1{,}(0)=1$; $2{,}3(9)=2{,}4$.

Дакле,

(1) сваки рационалан број се може представити у облику бесконачног периодичног децималног разломка;

(2) сваки периодични децимални разломак може се представити у облику обичног разломка, тј. сваки периодични децимални разломак је рационалан број.

Прво тврђење смо показали лако, а друго ћемо илустровати на примерима.

Пример 5. Представити у облику обичног разломка периодичне децималне разломке: (а) $0{,}(8)$; (б) $0{,}(64)$; (в) $0{,}2(031)$.

Решење. (а) Означимо $x = 0{,}8 = 0{,}888\ldots$. Тада је $10x = 8{,}888\ldots$, па одузимањем добијамо $9x = 8$, па је $x = \dfrac{8}{9}$.

(б) $x = 0{,}(64)$; $100x = 64{,}(64)$; $99x = 64$; $x = \dfrac{64}{99}$.

(в) $0{,}2(031) = 0{,}2 + 0{,}0(031)$ итд.

Напомена. Наведени метод даје тачне резултате, али та чињеница захтева прецизнији доказ. Он ће ученици упознати у старијим разредима.

Задаци

17. Представи у облику децималног разломка: (а) $\dfrac{17}{20}$; (б) $-\dfrac{8}{25}$; (в) $\dfrac{26}{10}$; (г) $5\dfrac{9}{10}$.
18. Представити у облику обичног разломка: (а) $0{,}(3)$; (б) $0{,}2(5)$; (в) $-7{,}(36)$; (г) $7{,}2(25)$.
19. Унеси ознаку релације $<$, $=$ или $>$ на место $\square$, тако да добијеш тачне неједнакости:

    (а) $\dfrac{1}{3} \,\square\, 0{,}33$; (б) $\dfrac{1}{3} \,\square\, 0{,}(3)$; (в) $-\dfrac{3}{14} \,\square\, -0{,}21$; (г) $0{,}14285 \,\square\, \dfrac{1}{7}$.
20. *Аритметичка средина* бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ је број $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$. Одреди аритметичку средину бројева:

    (а) $\dfrac{1}{3}$; $0{,}25$; $\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{1}{6}$; (б) $\dfrac{3}{4}$; $0{,}73$; $0{,}69$; (в) $\dfrac{1}{4}$; $0{,}23$; $0{,}26$; $\dfrac{1}{5}$; $0{,}25$;

    (г) $0{,}011$; $0{,}012$; $0{,}013$; $0{,}017$; (д) 70; $70{,}1$; $70{,}4$; $69{,}7$; $86{,}6$; $71{,}1$.
21. Ако је $f(x) = 0{,}35x + 0{,}0007$, одреди: $f(0)$; $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$; $f(-0{,}002)$.
22. Одреди: (а) $f(-5)$; (б) $f(5)$; (в) $f(|x|)$ ако је $f(x) = |x| + x$.

5. Заокругљивање

Посматрајмо најпре примере заокругљивања децималних разломака на једну децималу.

Пример 6. $0{,}236 \approx 0{,}2$; $2{,}(6) = 2{,}66\cdots \approx 2{,}7$; $-7{,}2(56) \approx -7{,}3$.

Уопште, ако је друга децимала мања од 5, број заокругљујемо тако што одбацујемо све децимале после прве. Ако је друга децимала већа од 5, или је једнака 5 али после ње има још цифара, онда одбацујемо све цифре осим прве, али прву цифру увећавамо за 1. Остаје да се одреди поступак када је друга цифра 5 и после ње нема других цифара. Тада се примењује тзв. правило парне цифре, као у наредном примеру.

Пример 7. $0{,}45 \approx 0{,}4$; $5{,}75 \approx 0{,}8$; $-0{,}15 \approx -0{,}2$.

Аналогно се поступа код заокругљивања на k децимала.

Пример 8. (а) $3{,}14159 \approx 3{,}14$ (заокругљено на две децимале); (б) $1{,}41425 \approx 1{,}4142$ (на 4 децимале).

Задаци

23. Заокругли број 1,7320508 на: (а) две децимале; (б) шест децимала.
24. Заокругли број $-0,(6)$ на: а) на једну децималу; б) на четири децимале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Глејзер, *Природни и рационални бројеви*, Настава математике **52**, 2-3 (2007), 1–14.
2. М. Марјановић, *Математичка анализа I*, Научна књига, Београд, 1997.
3. М. Марјановић, М. Зељић, *Кроз геометрију до реалних бројева*, Настава математике **51**, 1-2 (2006), 2–11.
4. М. Марјановић, Г. Калајџић, *О релацији еквиваленције*, Настава математике **38**, 1 (1992), 1–7.
5. Р. Тошић, Р. Деспотовић, Б. Шешеља, *Математика за I разред средње школе*, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1983.

Архитектонска техничка школа у Београду

E-mail: `vesna.bal.matematika@gmail.com`